Suite II - Die Arithmetische

Teil 1: Essays 91-99

ERRATUM Suite I. Vorwort. IdentitätsSatz Binär-Cartesisches Produkt. Liste der KlassenVariablen, Teil 3. ALG-Notation. Algebra in A. Algebra auf Q. 1. nan. $+\infty$. $-\infty$. ∞. i. imaginäre Einheit. Zahl. reelle Zahlen. sreelle Zahlen. treelle Zahlen. komplexe Zahlen. bkomplexe Zahlen. $\mathbb{A}$. $\mathbb{R}$. $\mathbb{S}$. $\mathbb{T}$. $\mathbb{C}$. $\mathbb{B}$. ParameterAxiom I, II. Arithmetisches Axiom I,II,III,IV,V,VI. RealTeilFunktion Re. ImaginärTeilFunktion Im. Addition A. Multiplikation M. MinusFunktion mns. ReziproksFunktion rez. REIM-Notation. RECH-Notation. ab2. FundamentalSatz Addition. FundamentalSatz Addition0. FundamentalSatz Multiplikation0. FundamentalSatz Division0. FundamentalSatz $\mathbb{T}$.

Andreas Unterreiter

25. April 2012

Damit wie angestrebt mit Hilfe der **Liste der KlassenVariablen, Teil 1** ein "endlich unerschöplicher" Vorrat an KlassenVariablen zur Verfügung steht, ist die **Liste der KlassenVariablen, Teil 1** und die **Rekursiv-Eigenschaft Ensemble KlassenVariable, Teil 1** durch die folgende Vereinbarung zu ersetzen:

Liste der KlassenVariablen, Teil 1

1) Jedes der folgenden Symbole ist eine KlassenVariable Typ 1:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
A & B & C & D & E & F & G & H & I & J & K & L & M \\
N & O & P & Q & R & S & T & U & V & W & X & Y & Z \\
a & b & c & d & e & f & g & h & i & j & k & l & m \\
n & o & p & q & r & s & t & u & v & w & x & y & z \\
\alpha & \beta & \gamma & \delta & \epsilon & \varepsilon & \zeta & \eta & \theta & \vartheta & \iota & \kappa & \lambda \\
\mu & \nu & \xi & \varpi & \rho & \varrho & \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon & \phi & \varphi & \chi \\
\psi & \omega & \Gamma & \Theta & \Lambda & \Xi & \Upsilon & \Phi & \Psi & \Omega & & & \\
\mathfrak{A} & \mathfrak{B} & \mathfrak{C} & \mathfrak{D} & \mathfrak{E} & \mathfrak{F} & \mathfrak{G} & \mathfrak{H} & \mathfrak{I} & \mathfrak{J} & \mathfrak{K} & \mathfrak{L} & \mathfrak{M} \\
\mathfrak{N} & \mathfrak{O} & \mathfrak{P} & \mathfrak{Q} & \mathfrak{R} & \mathfrak{S} & \mathfrak{T} & \mathfrak{U} & \mathfrak{V} & \mathfrak{W} & \mathfrak{X} & \mathfrak{Y} & \mathfrak{Z} \\
\mathfrak{a} & \mathfrak{b} & \mathfrak{c} & \mathfrak{d} & \mathfrak{e} & \mathfrak{f} & \mathfrak{g} & \mathfrak{h} & \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} & \mathfrak{l} & \mathfrak{m} \\
\mathfrak{n} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p} & \mathfrak{q} & \mathfrak{r} & \mathfrak{s} & \mathfrak{t} & \mathfrak{u} & \mathfrak{v} & \mathfrak{w} & \mathfrak{x} & \mathfrak{y} & \mathfrak{z}
\end{array}
$$

2) Sind "$\%$" und "$\overline{\%}$" KlassenVariable Typ 1,
dann ist "$\%\overline{\%}$" eine KlassenVariable Typ 1.

Suite II - Die Arithmetische unterscheidet sich in mehreren Aspekten von **Suite I - Die StrukturGebende**.

Suite I ist vom Bestreben, die FixpunktSätze von **Tarski** entsprechend der Darstellung in **N. Dunford & J.T. Schwartz**, *Linear Operators. Part I: General Theory*, Wiley, 1988(6) in eine neue Form zu bringen, getragen. Damit ist die Grundstruktur von **Suite I** *extern* vorgegeben.

Dem steht die *selbstbestimmte* Zielsetzung von **Suite II**, eine Arithmetik unter Einbeziehung von $+\infty, -\infty$ und $\mathsf{nan} = (+\infty) + (-\infty)$ in der neuen, in **Suite I** ausgestalteten Form zu entwickeln, gegenüber. So gesehen ist **Suite II** näher an der Darstellung der mir bedeutend erscheinenden Mathematik angesiedelt als **Suite I**.

In **Suite I** wird Einiges über Mengen und Unmengen gesagt, doch das Ensemble der "Parameter", also der "real existierenden Klassen" ist in **Suite I** erstaunlich klein - $0, \mathcal{U}, \mathcal{P}(0), \mathcal{U} \times \mathcal{U}, \mathsf{zo}, \mathsf{id}, \mathcal{U}_{\text{sngltn}}, \mathcal{P}_{\text{endl}}, \mathcal{P}^*_{\text{endl}}, \mathsf{sse}, \mathsf{sub}$ sind die einzigen Parameter, die in **Suite I** vorkommen. Das liegt auch daran, dass in **Suite I** jeder dieser Parameter durch Definition in die Essays eingeführt wird. Dieser Weg wird in **Suite II** - aus pragmatischen Gründen - durch eine andere, kürzere und axiomatisch nicht vollständig zufrieden stellende Methode ergänzt. In **Suite II** wird die *Existenz spezieller "arithmetischer" Mengen wie* $\mathbb{R}, \mathbb{A}, \leq$ *axiomatisch fest gelegt.*

Den "ExistenzAxiomen" werden etliche "arithmetische Axiome" zur Seite gestellt - etwa dass die Addition reeller Zahlen kommutativ ist - und ausgehend von dieser Ansammlung von Axiomen wird die Arithmetik unter Einbeziehung von $+\infty, -\infty, \mathsf{nan}$ entwickelt.

Mit dieser Vorgehensweise wird kein "minimales Ensemble" von Axiomen erhalten, sondern es kann zügig weitergearbeitet werden.

Die Axiome von **Suite II** sind größtenteils allgemein akzeptierte Aussagen über die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen und die Grundrechenarten in den reellen und komplexen Zahlen unter Einbeziehung von Real- und ImaginärTeil-Funktion Re und Im. Darüber hinaus gehend muss geregelt werden, wie sich $+\infty, -\infty, \mathsf{nan}$ in Bezug auf die Grundrechenarten und $\leq$ verhalten. Die Festlegungen $0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = 0$ sind auch in anderen Bereichen der Mathematik Folklore, die Festlegungen $\mathsf{nan} = (+\infty) + (-\infty)$ und $0 \cdot \mathsf{nan} = 0$ sind vermutlich etwas gewöhnungsbedürftig. Darüber hinaus gehend opfere ich aus Gründen, die in meiner eigenen Vorlesungs- und Publikationstätigkeit liegen, die Konvention, wonach die Reziproksfunktion für 0 nicht definiert ist, indem ich die nun wirklich stark gewöhnungsbedürftige Festlegung $1 : 0 = 0$ treffe. Mir ist bewusst, dass damit, einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit folgend, zwar einige Probleme beiseite geschafft werden - etwa ist der Quotient komplexer Zahlen nun stets eine komplexe Zahl -, die an anderer Stelle - ich denke da an die Stetigkeit des Quotienten stetiger Funktionen - ihren Tribut fordern.

Dass mit **Suite II** ein wichtiger Schritt in Richtung eines pragmatischen Umgangs mit der neuen sprachlichen Form gelingt, ist auch der Zuordnung der Essays zu unterschiedlichen Themengebieten zu entnehmen. Es geht in **Suite II** “nicht nur” um Mengenlehre, sondern auch um “Algebra” und “Arithmetik” .

Es stellt sich bei der Arbeit an **Suite II** heraus, dass einige Hilfsresultate der Mengenlehre benötigt werden, die in der vorangegangenen **Suite I** nicht enthalten sind, obwohl diese ganz gut dorthin passen würden. Diese Situation ist nicht schön, doch - meiner Erfahrung nach - typisch für das wissenschaftliche Arbeiten, bei dem es oft vorkommt, dass zwar Ähnliches gut dokumentiert ist, doch für die aktuellen Arbeit in mehr oder wenig stark abgewandelter Form benötigt wird. In derlei Lagen wird hier und in den folgenden Suiten der “eigentlichen” Abhandlung in behelfsmäßiger Weise ein (oder mehrere) Essay(s) mit Resultaten aus anderen Gebieten vorangestellt.

Damit verabschiede ich mich mit **Suite II** endgültig vom Lehrbuch, bei dem üblicherweise erst die Hilfsresultate bewiesen werden, ehe am Ende und als Höhepunkt die schwierigen Gipfel erklommen werden.

Oder mein LebensWerk ist eben ein Lehrbuch individuellen Charakters.

Abgesehen von Zielsetzungsfragen und Aspekten der äußeren Form ändert sich beim Übergang von **Suite I** zu **Suite II** mein Bild von der sprachlichen Form, die ich der Mathematik hiermit gebe. Stehen bei der Abfassung von **Suite I** noch musikalische Aspekte im Vordergrund, so sehe ich bei er Erstellung von **Suite II** in der hier entwickelten Sprache ein sehr feines, doch ungemein festes Netz, mit dem sich vielfältige Strukturen einfangen lassen. Wegen der Feinheit ist diese Sprache geeignet, auch kleinste Muster abzubilden. Wegen der Festheit kann dieser Abdruck auch weitergegeben werden - und es können auch “riesige” Abdrücke genommen werden.

Das Herleiten “elementarer Rechen-Aussagen” - wie etwa $(1 + \mathsf{i}) \cdot (1 - \mathsf{i}) = 2$ - ist unerwarteter Weise kompliziert. Ich bin geneigt, hierin die mir seit Studentenzeiten vertraute, fundamentale Grenze zwischen der “beweisenden” und der “rechnenden ” Mathematik zu sehen.

Zur Erläuterung dieser Grenze sei darauf hingewiesen, dass es einen großen Unterschied macht, ob die Aussage “$5+7 = 12$” unter Anwendung antrainierter Rechenregelen per Verfahren *ausgerechnet* wird, oder ob diese Gleichung - natürlich unter einer vorab festzulegenden Regelung, was $5, +, 7, 12$ bedeutet - *bewiesen* wird. Wendet der Leser “rechnende Mathematik” an, so wird bei der Lektüre von “$5+7+12$” ein gleicher oder ähnlicher Algorithmus wie der Schreiber dieser Aussage durchgeführt und das Ergebnis wird bestätigt, wenn der Leser auf das gleiche Resultat kommt. Bei der “beweisenden Mathematik” muss “$5+7 = 12$” in einzelnen Beweisschritten bewiesen werden, so dass zu guter Letzt die Aussage “$5 + 7 = 12$” als Satz in die Essays aufgenommen werden kann.

Ich habe noch keinen Weg gefunden, die bereichernde "rechnende Mathematik" in effizienter Weise die Essays zu integrieren.

Demzufolge bleibt für absehbare Zeit nur der Weg, alle "elementaren Rechen-Aussagen" zu beweisen. Als Erleichterung akzeptiere ich bis auf Weiteres lediglich, einige ausgewählte Ergebnisse "rechnender Mathematik" als *beweisfreie Beispiele* in die Essays aufzunehmen, wenn die Bedeutung dieser Beispiele lediglich illustrativen Charakter hat, indem etwa damit dokumentiert wird, dass eine bestimmte Aussage nicht ohne Weiteres in eine bestimmte Richtung verallgemeinert werden kann.

Das Zitieren von Resultaten gestaltet sich wegen der wachsenden Zahl an bereits bewiesenen Aussagen als zunehmend schwierig. Um besser zurecht zu kommen lege ich eine **Formelsammlung** an, in der die Resultate von **Suite II** und einige Resultate von **Suite I** aufgenommen werden. Diese **Formelsammlung** wird im Zuge der Arbeit an den nächsten Suiten erweitert.

#91. Im **ISBCP: IdentitätsSatz Binär-Cartesisches Produkt** wird von der Gleichung $x \times y = z \times w$ ausgegangen. Es werden Bedingungen formuliert, um aus dieser Gleichung auf $x = z$ und $y = w$ schließen zu können. Im Speziellen folgen aus $0 \neq x \times y = z \times w$ die Ausssagen $0 \neq x = z \neq 0$ und $0 \neq y = w \neq 0$.

#92. Es wird Einiges über geordnete Paare ergänzt und es wird $x \times y \neq \mathcal{U}$ bewiesen.

#93. Die **Liste der KlassenVariablen, Teil 3** wird in die Essays eingeführt und es stehen mir mit der korrspondierenden **Rekursiv-Eigenschaft** de facto unendlich viele weitere "algebraisch aussehende" KlassenVariable - etwa $\Box$ und somit auch $\Box\Box$ - zur Verfügung. Auch werden **Algebren in/auf** einer Klasse mit Unterstützung der `ALG`**-Notation** definiert. Besonderes Augenmerk verdienen **93-12** und der hieraus via Negation gewonnene Satz **93-13**. Diese beiden Kriterien garantieren, dass für jede Algebra $\Box$ in einer Klasse A entweder $q\_\Box\_p \in A$ (falls $q, p \in A$) oder $q\_\Box\_p = \mathcal{U}$ (falls $q \notin A$ oder $p \notin A$) gilt. Damit ist nicht nur $q\_\Box\_p$ *für alle* q, p zufrieden stellend definiert, sondern es liegt auch nahe, etliche ursprünglich nur für $\Box$ verfügbare "Rechenregeln" auf beliebige Klassen q, p zu übertragen. Beispielsweise steht (ohne dass dies explizit aufgenommen wird) mit **93-12,13** fest, dass wenn $\Box$ eine "kommutative" Algebra in A ist, die Gleichung $q\_\Box\_p = p\_\Box\_q$ nicht nur für $q, p \in A$ sondern *für alle* q, p gilt.

#94. Es wird unter anderem gezeigt, dass aus $x(p) \neq x(q)$ stets $p \neq q$ folgt. Diese und andere triviale Aussagen der Mengenlehre sind an sich vielleicht wenig bemerkenswert, kürzen aber an späterer Stelle Beweise ab.

#95. Die Eins betritt per definitionem $1 = \{0\}$ die Essays. Die Menge $\mathbb{A}$ und die Klassen $\mathbb{R}$, nan, $+\infty$, $-\infty$, i werden via **ParameterAxiom I** in die Essays eingeführt. Im **Arithmetischen Axiom I** werden grundlegende Eigenschaften dieser Klassen - die sich bald alle als *Mengen* herausstellen - formuliert. Die zentrale Definition legt fest, dass es sich bei x genau dann um eine **Zahl** handelt, wenn $x \in \mathbb{A}$ gilt. Konsequenter Weise ist $\mathbb{A}$ die **Menge der Zahlen** und es gilt für jede Klasse x die Alternative (x Zahl) $\vee$ ($x \notin \mathbb{A}$). $\mathbb{A}$ umfasst $\mathbb{R}$ und $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty, \mathsf{i}$ sind Elemente von $\mathbb{A}$, während ∞ kein Element von $\mathbb{A}$ ist. ∞ wird erst später im Zusammenhang mit der " Alexandroff-Einpunkt-Kompaktifizierung von $\mathbb{C}$" betrachtet. Die Menge $\mathbb{S}$ der sreellen Zahlen besteht aus $\mathbb{R}$ und aus $+\infty$ und $-\infty$. Die Menge $\mathbb{T}$ der treellen Zahlen $\mathbb{T}$ setzt sich aus $\mathbb{S}$ und aus nan zusammen. Die komplexen (und die bkomplexen) Zahlen werden später in die Essays eingeführt.

#96. Im **ParameterAxiom II** werden die arithmetischen "Grundfunktionen" - die RealTeilFunktion Re, die ImaginärTeilFunktion Im, die Addition A, die Multiplikation M, die MinusFunktion mns und die ReziproksFunktion rez - in die Essays eingeführt. Im **Arithmetischen Axiom II** wird fest gestellt, dass $\mathsf{Re}, \mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$ gilt, dass A, M Algebren in $\mathbb{A}$ sind und dass $\mathsf{mns}, \mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. Entsprechend **`REIM`-Notation** wird gelegentlich $\mathsf{Re}x$ an Stelle von $\mathsf{Re}(x)$ und $\mathsf{Im}x$ an Stelle von $\mathsf{Im}(x)$ geschrieben. Via **Arithmetisches Axiom III** gilt $\mathsf{Re}0 = \mathsf{Im}0 = \mathsf{Re}\mathsf{i} = 0$ und $\mathsf{Im}\mathsf{i} = 1$. $\mathbb{C}$ ist die Klasse - sogar: Menge - all jener Zahlen, für die Real- und ImaginärTeil in $\mathbb{R}$ sind und $\mathbb{B}$ ist die Klasse - sogar: Menge - all jener Zahlen, für die Real- und ImaginärTeil in $\mathbb{S}$ sind. $\mathbb{C}$ ist die Menge der komplexen und $\mathbb{B}$ ist die Menge der bkomplexen Zahlen. Mit der **`RECH`-Notation** werden die Standard-Notationen für Addition, Multiplikation, MinusFunktion und - aufbauend auf der ReziproksFunktion - der Division in die Essays eingebracht. Durch **96-9** ensteht ein erster Eindruck, welch vielfältige Konsequenzen die Aussage "x Zahl" hat. Auch die negierte Aussage "$x \notin \mathbb{A}$" ist reich an Schlussfolgerungen. Ähnlich reichhaltig sind die Folgerungen aus "$-x, \mathsf{rez}(x), x + y, x \cdot y, x : y$ Zahl" . Die "AbsolutQuadratsFunktion" $\mathsf{ab2}$ erscheint erstmalig in den Essays. Es gilt $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$. mit $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$ für Zahlen x. Im **Arithmetischen Axiom IV** werden Re, Im in Verbindung mit Addition, Multiplikation, MinusFunktion und ReziproksFunktion untersucht. Auch wird fest gelegt, dass Zahlen x, y gleich sind, wenn Real- und ImaginärTeil identisch sind. Die Definitionen $\mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$ und $\mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x)) = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$ geraten *NICHT in Konflikt* mit den später - axiomatisch - fest gelegten Formeln $\mathsf{rez}(0) = \mathsf{rez}(+\infty) = \mathsf{rez}(-\infty) = 0$ und $\mathsf{rez}(\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$. Es zeigt sich, dass einige Aussagen vom **Arithmetischen Axiom IV** unter schwächeren - oder sogar: gar keinen - Voraussetzungen gültig sind. So wird etwa in **96-24** gezeigt, dass $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$ *genau dann* gilt, wenn x Zahl oder $x = \mathcal{U}$ gilt. Die Alternative "Zahl oder $\mathcal{U}$" spielt auch im Folgenden eine große Rolle. Als indirekte Konsequenz hieraus und aus **96-19** - unter anderem $\mathsf{Re}\mathcal{U} = \mathcal{U}$ - ergibt sich etwa in **96-25** die voraussetzungsfrei gültige Formel $\mathsf{Re}(x+y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$. Ähnliches gilt für $\mathsf{Re}(x \cdot y), \mathsf{Re}(-x), \mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x))$ und für die entsprechenden ImaginärTeile. Im **Arithmetischen Axiom V** werden die vertrauten Rechenregeln im Umgang mit *reellen Zahlen* in die Essays eingeführt.

#97. Im **Arithmetischen Axiom VI** wird der Umgang von $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty$ und der Addition, der Multiplikation, der MinusFunktion und der Reziproks-Funktion geregelt. Am interessantesten sind die axiomatischen Festsetzungen $\mathsf{rez}(0) = \mathsf{rez}(+\infty) = \mathsf{rez}(-\infty) = 0$ sowie $\mathsf{rez}(\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$. Auch die Gleichungen $0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = 0$ und $(+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0$ sowie $0 \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot 0 = 0$ sind hervorhebbar.

#98. Der Essay ist um vier fundamentale Sätze der Arithmetik gruppiert. Im **FundamentalSatz Addition** werden die Gleichungen $x+y = y+x$ und $x+(y+z) = (x+y)+z$ als allgemeine Formeln - also unabhängig davon, ob es sich bei x, y, z um Zahlen oder nicht handelt - etabliert. Die Gleichung $0+x = x$ ist gemäß **FundamentalSatz Addition**0 genau dann verfügbar, wenn $x+0 = x$ und dies ist genau dann der Fall, wenn für x die vertraute Alternative x Zahl oder $x = \mathcal{U}$ gilt. Konsequenter Weise sind etwa die Gleichungen $0 + (x : y) = (x : y) + 0 = 0$ *stets* verfügbar. Die Aussagen $0 \cdot x = 0$ und $x \cdot 0 = 0$ und x Zahl sind entsprechend **FundamentalSatz Multiplikation**0 äquivalent. Mit $\mathsf{rez}(0) = 0$ folgt hieraus der **FundamentalSatz Division**0, wonach $0 : x = 0$ und $x : 0 = 0$ und x Zahl äquivalent sind. Konsequenter Weise gelten etwa die - zugegebener Maßen etwas gewöhnungsbedürftigen - Formeln $\mathsf{nan} : 0 = \mathsf{i} : 0 = (+\infty) : 0 = (-\infty) : 0 = 0 : 0 = 1 : 0 = 0$.

#99. Einleitend wird bewiesen, dass jede reelle, jede sreelle, jede treelle, jede komplexe und jede bkomplexe Zahl eine Zahl ist. Danach wird im **FundamentalSatz** $\mathbb{T}$ fest gestellt, dass a genau dann eine treelle Zahl ist, wenn $a = \mathsf{Re}a$ und $(a \text{ Zahl}) \vee (a \text{ Menge}) \vee (a \neq \mathcal{U})$ gilt und dies alles ist genau dann der Fall, wenn $\mathsf{Im}a = 0$.

#100. Im **FundamentalSatz**$--$ stellt sich heraus, dass die vertraute Gleichung $-(-x) = x$ genau dann gilt, wenn x eine Zahl ist oder $x = \mathcal{U}$ gilt. Vor allem auf Grund dieser Alternative sind voraussetzungsfrei Gleichungen wie $-(-\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x$ oder $-(-(x+y)) = x+y$ verfügbar. Im Speziellen gilt unter anderem $-(-\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$ oder auch $-(-0) = 0$ und $-(-1) = 1$ und $-(-\mathsf{i}) = \mathsf{i}$.

#101. x ist genau dann eine komplexe Zahl, wenn $\mathsf{Re}x, \mathsf{Im}x$ reell sind. Ähnlich ist x genau dann bkomplex, wenn $\mathsf{Re}x, \mathsf{Im}x$ sreell sind. In $\cup, \cap, \vee, \wedge$**Satz Zahlen** werden Aussagen über binäre Vereinigungen und binären Durchschnitte von $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ getroffen. Als Konsequenz hiervon stellt sich unter anderem heraus, dass aus $\mathsf{Re}x \in \mathbb{B}$ die Aussage $\mathsf{Re}x \in \mathbb{S}$ folgt. x ist genau dann in $\mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$, wenn weder Real- noch ImaginärTeil von x gleich nan ist, aber $\mathsf{Re}x$ oder $\mathsf{Im}x$ gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist. Die Inklusions-Aussagen über $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ werden in $\subseteq$**Satz Zahlen** zusammengefasst und im $\in$**Satz Zahlen** mit Hilfe von $\in$ und Implikationen zitat-freundlicher re-formuliert. Damit manifestiert sich die schwelende Erkenntnis, dass die klassentheoretischen Formulierungen mit $\cup, \cap, \subseteq$ nicht immer hilfreich beim Beweisen sind. Es ist an vielen Stellen einfacher, an Stelle einer Aussage wie $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ auf die Implikations-Kette $(p \in \mathbb{R}) \Rightarrow (p \in \mathbb{C})$ zurück zu greifen.

#102. Im Umfeld von **FundamentalSatz** $-$ wird gezeigt, dass $x - x = 0$ genau dann gilt, wenn x eine komplexe Zahl ist. Auch ist $x + y$ genau dann in $\mathbb{C}$, wenn x, y komplex sind. Um von $x + a = y + a$ auf $x = y$ schließen zu können, sind nach **Additive KürzungsRegel** die Bedingungen $a \in \mathbb{C}$ und x *oder* y Zahl hinreichend. Ähnlich gilt, dass, um aus $x + a = y$ die Gleichung $x = y - a$ folgern zu können, auf die Bedingungen $a \in \mathbb{C}$ und x *oder* y Zahl zu achten ist, siehe **Additive VerschiebungsRegel**.

#103. Die Gleichung $-(x + y) = -x - y$ ist laut **FS**$-+$ *voraussetzungsfrei* gültig. Ebenso gelten unter anderem die Gleichungen $x - (-y) = x + y$ oder auch $-(x - y) = y - x$. Jene Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$, in denen die Summe $x + y$ von x und y in $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ liegt werden "bis auf Kommutativität" in $+$**Satz Zahlen** angegeben.

#104. Im Rahmen der Diskussion arithmetischer Eigenschaften von $\mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$ wird unter anderem festgestellt, dass $x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$ genau dann gilt, wenn $x \in \mathbb{T}$ und $x - x = \mathsf{nan}$ gilt.

#105. Eine Klasse x ist genau dann in $\mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$, wenn x eine Zahl ist, die nicht Element von $\mathbb{C}$ ist. Es gilt $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{C}$ genau dann, wenn $\mathsf{Re}(x - x) = \mathsf{nan}$ oder $\mathsf{Im}(x - x) = \mathsf{nan}$.

#106. Für reelle Zahlen x, y gilt $(-x) \cdot y = -x \cdot y$ und $x \cdot (-y) = -x \cdot y$ und $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$. Auch ist $\mathbb{R}$ **NullTeilerFrei**: Falls x, y reelle Zahlen sind, so gilt $x \cdot y = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.

#107. Die **KleinerGleich-Relation** $\le$ wird via **ParameterAxiom III** in die Esssays eingeführt. In **AAVII: Arithmetisches Axiom VII** wird unter anderem axiomatisch fest gehalten, dass $\le$ ist eine antiSymmetrische Halbordnung in $\mathbb{S}$ ist, dass $\mathbb{S}$ eine $\le$ _Kette ist und dass $\le$ *Total* Vollständig ist. Dass es mit $\le$ eine kanonische Total Vollständige Klasse - sogar: Menge - gibt, ist im Hinblick auf die bedeutende Rolle, die derlei Klassen in **Suite I** spielen, ausserordentlich zufrieden stellend. In **AAVII** werden auch die bekannten RechenRegeln im Umgang mit $<=\overset{\textbf{ir}}{\le}$ in die Essays eingeführt. Damit ist der Weg zum **KommutativGesetz Multiplikation** frei, wonach $x \cdot y = y \cdot x$ für *beliebige* Klassen x, y gilt. Auch kann nun endlich die Ungleichung $-\infty \neq +\infty$ - es gilt $-\infty < +\infty$ - bewiesen werden.

#108. Im $\cdot$**Satz Zahlen** wird fest gestellt, in welcher der Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ das Produkt $x \cdot y$ liegt, wenn x in $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ und y in $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ ist.

#109. Gemäß **FundamentalSatz** $\le +$ ist die Summe zweier Zahlen≥ 0 eine Zahl≥ 0 und wenn eine der beiden Zahlen sogar> 0 ist, dann ist auch die Summe> 0. Die Zahl 2 wird via $2 = 1 + 1$ in die Essays eingeführt.

#110. Die Gleichungen $(-x) \cdot y = -x \cdot y$ und $x \cdot (-y) = -x \cdot y$ und $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ gelten laut **FundamentalSatz**$- \cdot$ *für alle* Klassen x, y. Hieraus folgt unter anderem *für alle* Klassen die Gleichung $\mathsf{ab2}(-x) = \mathsf{ab2}(x)$.

#111. Das Produkt zweier sreeller Zahlen x, y ist genau dann$\neq 0$, wenn $0 \neq x$ und $0 \neq y$. Hieraus folgt der Satz von der **NullTeilerFreiheit in** $\mathbb{S}$, wonach das Produkt zweier sreeller Zahlen genau dann gleich Null ist, wenn wenigstens eine der beiden sreellen Zahlen gleich Null ist. Analoge Aussagen gelten für treelle Zahlen, im Speziellen gilt ein Satz von der **NullTeilerFreiheit in** $\mathbb{T}$. Konsequenter Weise ist das Produkt $x \cdot x$ einer treellen Zahl x mit sich selbst genau dann$= 0$, wenn $x = 0$.

#112. Es wird der **FundamentalSatz**$\leq \cdot$ weitergeführt, indem etwa bewiesen wird, dass aus $x < 0 \leq y$ die Aussage $x \cdot y \leq 0$ folgt. Für sreelle Zahlen x gilt stets $0 \leq x \cdot x$ und es gilt $0 \neq x \in \mathbb{S}$ genau dann, wenn $0 < x \cdot x$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $-x \cdot x < 0$.

#113. Wie in **AssoziativGesetz Multiplikation** $\mathbb{T}$ fest gestellt wird, gilt $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ für alle $x, z \in \mathbb{T}$ *unabhängig* davon, ob y eine treelle Zahl oder überhaupt eine Zahl ist. Eine analoge Aussage gilt für $x, z \in \mathbb{R}$. Interessanter Weise ist $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ auch für $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$ oder für $(x = 0) \vee (y = 0) \vee (z = 0)$ gültig.

#114. Die Voraussetzung $x \in \mathbb{C}$ ist via **DistributivGesetze** $\mathbb{C}$ hinreichend für $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$, $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$ und weitere, ähnliche Gleichungen. Eine analoge Aussage gilt - natürlich - auch im Spezialfall $x \in \mathbb{R}$, siehe **DistributivGesetze** $\mathbb{R}$, so dass sich die Frage erhebt, warum dann das **DG**$\mathbb{R}$ in die Essays aufgenommen wird. Die Antwort ist einfach: weil dann in jenen Beweisen, in denen $x \in \mathbb{R}$ gilt, direkt auf das DistributivGesetz für beliebige y, z zurück gegriffen werden kann, ohne dass hierfür ein Zwischenschritt zum Nachweis von $x \in \mathbb{C}$ erforderlich wäre. Weder ist ein allgemeines noch ein in $\mathbb{A}$ gültiges DistributivGesetz verfügbar. Falls $x, z \in \mathbb{C}$, so gilt via **AssoziativGesetz Multiplikation** $\mathbb{C}$ die Gleichung $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Der Beweis stützt sich auf **DG**$\mathbb{R}$.

#115. Bei der Arbeit am LebensWerk werden in meinem Hinterkopf Fragen, die an früherer Stelle auftreten, weiter bearbeitet. Nach einiger Zeit wird dann auf die eine oder andere offene Frage eine gute Antwort gefunden. Wenn es so weit ist, dann wird das Ergebnis in die Essays aufgenommen, auch wenn der Kontext (wie im vorliegenden Fall) ein anderer ist. Hier handelt es sich um eine offene Frage der Mengenlehre: Hat jede nicht leere, endliche Kette ein Minimum oder zumindest ein minimales Element? Die Antwort ist: nein. Das Beispiel erinnert an eines von Eschers Bildern, auf denen eine im Kreis gehende Treppe scheinbar immer aufwärts - oder abwärts - geht.

#116. Ohne Bezug auf Funktionen oder Relationen wird fest gelegt, dass E **genau dann** C **in sich abbildet**, wenn $E[C] \subseteq C$ gilt. Für Funktionen f gibt es einige zu “ f bildet C in sich ab” äquivalente Aussagen. Im Speziellen gilt: Falls $f : D \to D$, dann bildet f die Klasse D in sich ab.

#117. Es wird gezeigt, dass mns die Mengen $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ in sich abbildet. Die Grundintention, mit dieser Abstraktion eine vereinfachende Darstellung der Aussagen **100-6** und **101-9** gewonnen zu haben, wird *nicht* erreicht. Immerhin sind nun die Aussagen “$p \in C$ genau dann, wenn $-p \in C$” für $C = \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ in einem einzigen Satz - naḿlich in **117-4** - zusammengefasst und nicht mehr über zwei Sätze verstreut.

#118. In **DistributivGesetze VZ** wird unter anderem fest gestellt, dass aus $0 \leq y, z$ die Gleichung $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ folgt - und zwar unabhängig davon, ob x eine nicht-negative Zahl oder überhaupt eine Zahl ist. Insofern sind die **DGVZ** komplementär zu den **DG**$\mathbb{C}$, wo nur eine Forderung an x - nämlich $x \in \mathbb{C}$ - erhoben wird, um die Gleichung $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ zu erhalten.

#119. $x+(+\infty)$ ist nie gleich $-\infty$ und $x+(-\infty)$ ist nie gleich $+\infty$. Die Addition von $+\infty$ und von $-\infty$ berührt den ImaginärTeil nicht.

#120. Die Gleichungen $x+y = \mathsf{nan}$ oder $+\infty$ oder $-\infty$ lassen einige Rückschlüsse auf x, y zu.

#121. Irgendwann stolpere ich bei der Lektüre einer in die Analysis einführenden Monographie über die Formulierung, dass für jede reelle Zahl x eine und nur eine der drei Aussagen $x < 0$ oder $x = 0$ oder $0 < x$ gilt. Diese Formulierung stört mich, da sie meinem Empfinden weniger präzise ist als die Formulierung anderer Resultate der Monographie. Diese Unzufriedenheit schwelt einige Zeit und mündet in der Absicht, auch dem *ausschließenden oder*, dem `aut`, eine Tür zu meinem LebensWerk zu öffnen. Auch im Hinblick auf das soeben erwähnte Beispiel reicht ein zweistelliges `aut` nicht aus, es muss mindestens ein dreistelliges `aut` her - und da stellt sich – die Logiker mögen mir meine Naivität an dieesr Stelle nachsehen – heraus, dass ein mehrstelliges `aut` trotz Kommutativität und Assoziativität des binären `aut` nicht die gewünschten Eigenschaften hat, da etwa `A aut (B aut C)` auch `A` $\wedge$ `B` $\wedge$ `C` bedeuten kann. Also wird ein eigenes $\overset{\star}{\mathtt{aut}}$ definiert und es werden einige der bisherigen Aussagen mit $\overset{\star}{\mathtt{aut}}$ re-formuliert. Im Speziellen gilt $x \Delta y = \{\omega : (\omega \in x) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (\omega \in y)\}$ und mit dieser Darstellung und der Assoziativität von $\overset{\star}{\mathtt{aut}}$ wäre etwa $x\Delta(y\Delta z) = (x\Delta y)\Delta z$ einfacher zu beweisen. Die Betrachtungen legen es auch nahe, eine lediglich ausschließende, mehrstellige logische Operation, nämlich `exc`, einzuführen. Am Ende des Essays bin ich sicher, mit $\overset{\star}{\mathtt{aut}}$ und `exc` Hilfsmittel zur Verfügung zu haben, die Weiteres vereinfachen. Diese Sicherheit schwelt noch im folgenden Essay und wird dann bis zum Ende von **Suite II** enttäuscht, so dass *dieser* Essay im Nachhinein als Exot bezeichnet werden kann. So ist eben die Arbeit am LebensWerk.

#122. Unter Einbeziehung von `exc` wird unter anderem die Aussage $(x < 0)$ `exc` $(x = 0)$ `exc` $(0 < x)$ bewiesen, die sich im Fall $x \in \mathbb{S}$ unter Einbeziehung von $\overset{\star}{\mathtt{aut}}$

zu $(x < 0) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (x = 0) \overset{\star}{\mathtt{aut}} (0 < x)$ verschärft. Damit ist die Unzufriedenheit, die im Kommentar zu **#121** angesprochen wird, beseitigt.

#123. Die Gleichung $x \cdot 1 = x$ gilt genau dann, wenn $1 \cdot x = x$ und dies ist gemäß **FundamentalSatz Multiplikation**1 genau dann der Fall, wenn x Zahl oder $x = \mathcal{U}$. Interessanter Weise gelten via **FundamentalSatz Multiplikation**-1 die Gleichungen $(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x$ *für alle Klassen* x. Via **FundamentalSatz Division**1 gilt $x : 1 = x$ genau dann, wenn x Zahl oder $x = \mathcal{U}$. Auch wird $1 : x = \mathsf{rez}(x)$ als allgemeine Formel etabliert. Unter anderem gilt $1 : 1 = 1$ und $\mathsf{rez}(1) = 1$.

#124. Falls f eine Funktion ist, dann gilt $f(x) \in \mathsf{ran}\, f$ oder $= \mathcal{U}$. Für $f : D \to B$ gilt die speziellere Folgerung $f(x) \in B$ oder $= \mathcal{U}$.

#125. Falls $\square$ eine Algebra in A ist, dann folgt unter anderem $p\_\square\_q \in A$ oder $= \mathcal{U}$.

#126. In einer früheren Version wird dieser Essay mit "$\mathbb{A}\mathcal{U}$-Prinzip" bezeichnet. Damit soll angedeutet werden, dass die Alternative "Zahl oder gleich $\mathcal{U}$" in der vorliegenden Arithmetik eine große Rolle spielt. In der Tat wird hier unter anderem gezeigt, dass *für alle Klassen* x, y die Aussage $x : y$ Zahl oder $= \mathcal{U}$ gilt, so dass all jene Sätze, die von dieser Alternative ausgehen, auf $x : y$ angewendet werden können. So ist etwa x Zahl oder $= \mathcal{U}$ die Voraussetzung des **FSM**1, woraus sich ohne Weiteres $1 \cdot (x : y) = x : y$ *für alle Klassen* x, y ergibt. Bei der Überarbeitung nehme ich von dem Titel "$\mathbb{A}\mathcal{U}$-Prinzip" Abstand, da dieses Prinzip nur metasprachlich - etwa als "Falls & ein KlassenTerm mit & Zahl oder $= \mathcal{U}$ ist, dann gelten alle Aussagen, die von dieser Alternative ausgehen unabhängig davon, wie & mit konkreten Klassen zu Stande kommt" - formulierbar scheint.

#127. Es werden die Terme $x + y$ und $x \cdot x$ und $x \cdot x + y \cdot y$ thematisiert.

#128. Mit Hilfe von $\mathsf{ab2}(x)$ kann Einiges über die Lokalisierung von x ausgesagt werden. So gilt etwa $\mathsf{ab2}(x) = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$. Die Aussage $0 \leq \mathsf{ab2}(x) < +\infty$ ist *äquivalent* zu $x \in \mathbb{C}$ und es gilt $\mathsf{ab2}(x) = +\infty$ *genau dann, wenn* $x \in \mathbb{B} \setminus \mathbb{C}$. Auch nimmt $\mathsf{ab2}(x)$ *genau dann* den Wert nan an, wenn $x \in \mathbb{A} \setminus \mathbb{B}$ und schließlich gilt $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$ *genau dann, wenn* $x \notin \mathbb{A}$. Es wird $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$ fest gestellt, woraus unter anderem $\mathsf{ab2}(\mathsf{ab2}(x)) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(x)$ *für alle Klassen* x folgt.

#129. Falls $0 \neq x \in \mathbb{T}$ und falls $y \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$, dann $x \cdot y, y \cdot x \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{R}$.

#130. Die Gleichung $x : (x \cdot x) = 1 : x$ gilt für alle $x \in \mathbb{T}$. Es werden Konsequenzen aus $\mathsf{Re}x = 0$ oder aus $\mathsf{Im}x = 0$ diskutiert.

#131. Falls $0 \neq x \in \mathbb{T}$ und falls $x \cdot y \in \mathbb{T}$, dann $y \in \mathbb{T}$. Auch folgen aus $x \in \mathbb{T}$ und $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{T}$ die Aussagen $0 \neq x \in \mathbb{T}$ und $0 \neq y \in \mathbb{T}$. Ähnliches gilt wenn von $x \cdot y \in \mathbb{S}$ oder von $x \cdot y \in \mathbb{R}$ ausgegangen wird. Falls $x \in \mathbb{T}$ und $0 < x \cdot y$, dann $0 < x, y$ oder $x, y < 0$. Falls $x \in \mathbb{T}$ und $x \cdot y < 0$, dann $x < 0 < y$ oder $y < 0 < x$.

#132. Falls $0 \neq x$ und $x \cdot y \in \mathbb{B}$, dann ist x eine Zahl und $y \in \mathbb{B}$. Falls $0 \neq x$ und $x \cdot y \in \mathbb{C}$, dann ist x eine Zahl und $y \in \mathbb{C}$. Hier kommt 0 eine Sonderrolle zu, die durch die Voraussetzung $0 \neq x \cdot y$ ausgehebelt werden kann: Wenn $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{B}$, dann $0 \neq x, y \in \mathbb{B}$ und falls $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$, dann $0 \neq x, y \in \mathbb{C}$. Auch wird $x \cdot y \in \mathbb{C}$ thematisiert. Es gilt $x \cdot y \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $(x = 0) \wedge (y$ Zahl$)$ oder $(x$ Zahl$) \wedge (y = 0)$ oder eben $0 \neq x, y \in \mathbb{C}$. Ein korrespondierendes Kriterium mit $\mathbb{B}$ an Stelle von $\mathbb{C}$ ist *nicht* verfügbar.

#133. Es wird Einiges über $\mathsf{i} \cdot x$ gesagt. Gemäß **DistributivGesetz** i gilt unter anderem für $a, b \in \mathbb{T}$ die Gleichung $x \cdot (a + \mathsf{i} \cdot b) = x \cdot a + \mathsf{i} \cdot (x \cdot b)$.

#134. Wird eine reelle Zahl x mit i multipliziert, so ergibt sich eine komplexe Zahl mit RealTeil$=0$ und ImaginärTeil$=x$. Ähnliche Aussagen gelten, wenn von einer sreellen oder treellen Zahl x ausgegangen wird. Ist jeweils Real- oder ImaginärTeil von x, y gleich Null, so nimmt $x \cdot y$ einfachere Form an. So folgt etwa aus $\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y = 0$ die Identität $x \cdot y = -(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

#135. Der Term $x \cdot x$ wird in Bezug auf Lokalisierung in $\mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ untersucht. Während $x \in \mathbb{C}$ und $x \cdot x \in \mathbb{C}$ sowie x Zahl und $x \cdot x$ Zahl äquivalent sind, folgt aus $x \cdot x \in \mathbb{B}$ zwar $x \in \mathbb{B}$, doch die Umkehrung ist nicht immer gültig. Die Gleichung $x \cdot x = \mathsf{nan}$ gilt genau dann, wenn $x = \mathsf{nan}$ oder $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$. Die Gleichung $x \cdot x = +\infty$ gilt genau dann, wenn $x = +\infty$ oder $x = -\infty$. Die Gleichung $x \cdot x = -\infty$ gilt genau dann, wenn $x = \mathsf{i} \cdot (+\infty)$ oder $x = \mathsf{i} \cdot (-\infty)$.

#136. Die Gleichungen $(-x) : (-y) = x : y$ und $x : (-y) = (-x) : y = -x : y$ sind laut **FundamentalSatz**$-:$ voraussetzungsfrei gültig.

#137. Zunächst werden die Quotienten von x und $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty$ thematisiert. Danach wird eine breit angelegte Diskussion der Identifizierung von $1 : x$, wenn x in den Zahlenmengen $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ liegt, geführt. Im :**Satz Zahlen** wird aufgelistet, in welcher der eben angeführten Zahlenmengen $x : y$ liegt, wenn x und y jeweils aus $\mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{B}, \mathbb{A}$ sind. Weitere Diskussionen kreisen um $1 : x = 0$ und um $0 \neq 1 : x$. So sind etwa die Aussagen $0 \neq x \in \mathbb{C}$ und $0 \neq 1 : x \in \mathbb{C}$ äquivalent - und diese Äquivalenz bleibt - nicht trivialer Weise - richtig, wenn $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt wird.

#138. Es gelten voraussetzungsfrei einige Formeln rund um $x : y$, die Real- und ImaginärTeile enthalten. So gilt pars pro toto $x : y = (((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot (-(\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))) : \mathsf{ab2}(y)$.

#139. Mit den **FundamentalSätzen Quotient/Produkt**1, der **Multiplikativen EliminationsRegel** und der **Multiplikativen InversionsRegel** werden weitere Aussagen der "klassischen" Arithmetik in die Essays eingebracht. So gilt etwa $x : y = 1$ *genau dann*, wenn $x = y$ *und* $0 \neq x \in \mathbb{C}$, siehe **FundamentalSatz Quotient**1.

#140. Falls $x \cdot y = 0$, dann folgt gemäß **NullTeilerFreiheit in** $\mathbb{A}$ nicht nur $(x = 0) \vee (y = 0)$, sondern auch, dass x, y Zahlen sind. Folgerungen aus $0 \neq x \cdot y$

sind nicht ganz so einfach anzugeben, da zumindest zwischen $x \cdot y$ Zahl und $x \cdot y \notin \mathbb{A}$ unterschieden werden muss. So ist etwa $0 \neq x \cdot y \in \mathbb{C}$ äquivalent zu $0 \neq x, y \in \mathbb{C}$, während eine entsprechende *Äquivalenz*, wenn hier $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzt wird, *nicht gilt*. Weitere Aussagen rund um $x \cdot y = 0$ und um $0 \neq x \cdot y$ runden **NullTeilerFreiheit in** $\mathbb{A}$ und den Essay ab.

#141. Die Gleichung $x = 1 : (1 : x)$ gilt genau dann, wenn $x \in \mathbb{C}$ oder $x = \mathcal{U}$ oder $x = \mathsf{nan}$ oder $x = \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$ oder $x = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot \mathsf{nan}$. Ungeachtet dessen ist $1 : (1 : (1 : x)) = 1 : x$ stets gültig. Gemäß **Divisions-KürzungsRegeln** $\mathbb{C}$ gilt die vertraute Gleichung $(a \cdot x) : (a \cdot y) = x : y$ für alle komplexen x, y, a mit $0 \neq a$. Falls $x : a = y : a$ mit x *oder* y komplex und $0 \neq a \in \mathbb{C}$, so folgt via **Divisions-EliminationsRegel** die Gleichung $x = y$ mit $x, y \in \mathbb{C}$. Ähnlich folgt aus $x : a = y$ mit x *oder* y komplex und $0 \neq a \in \mathbb{C}$ via **Divisions-InversionsRegel** die Gleichung $x = y \cdot a$ mit $x, y \in \mathbb{C}$. Restriktiver geht es zu, wenn von $a : x = a : y$ oder von $a : x = y$ ausgegangen wird. Es wird gezeigt, dass aus $a : x = a : y$ mit ($0 \neq x \in \mathbb{C}$ *oder* $0 \neq y \in \mathbb{C}$ *oder* $x, y \in \mathbb{C}$) und $0 \neq a \in \mathbb{C}$ die Gleichung $x = y$ mit $x, y \in \mathbb{C}$ folgt. Auch gilt, dass wenn $a : x = y$ mit ($x \in \mathbb{C}$ *oder* $0 \neq y \in \mathbb{C}$) und $0 \neq a \in \mathbb{C}$ vorausgesetzt wird, die Gleichung $x = a : y$ mit $x, y \in \mathbb{C}$ folgt.

#142. Die $\leq$-Intervalle betreten die Essays. Abkürzend wird unter anderem $[a|b] = [a \overset{\leq}{|} b]$ geschrieben. Es gelten die Identitäten $[a| + \infty] = [a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$, $]a| + \infty] =]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$, $[-\infty|b] = \langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$ und $[-\infty|b[= \langle\cdot \overset{\leq}{|} b[$, so dass sich eigene Symbole für $[a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$, $]a \overset{\leq}{|} \cdot\rangle$, $\langle\cdot \overset{\leq}{|} b]$ und $\langle\cdot \overset{\leq}{|} b[$ erübrigen. Im Speziellen gilt $]-\infty| + \infty[= \mathbb{R}$ und $[-\infty| + \infty] = \langle\cdot \overset{\leq}{|} \cdot\rangle = \mathbb{S}$.

#143. Eine Klasse E **ist AD** genau dann, wenn die Summe zweier Elemente aus E stets in E ist und wenn für die Elemente von E das DistributivGesetz gilt. Die Rechtfertigung der Definition wird in der Gültigkeit einer bekannten Multiplikations-Aussage sichtbar. Ist eine Klasse E **AD**, so gilt für alle $x, y, z, w \in E$ die Gleichung $(x + y) \cdot (z + w) = (x \cdot z + x \cdot w) + (y \cdot z + y \cdot w)$.

#144. Die Gleichung $2 \cdot x = x + x$ ist universell gültig. In **Binomische 2er Formeln** wird Hinreichendes für die Gültigkeit der klassischen Formeln $(x + y) \cdot (x + y) = (x \cdot x + y \cdot y) + 2 \cdot (x \cdot y)$, $(x - y) \cdot (x - y) = (x \cdot x + y \cdot y) - 2 \cdot (x \cdot y)$, $(x + y) \cdot (x - y) = x \cdot x - y \cdot y$ präsentiert. In **Binomische 2er Formeln** i wird Hinreichendes für die Gültigkeit der klassischen Formeln $(x + \mathsf{i} \cdot y) \cdot (x + \mathsf{i} \cdot y) = (x \cdot x - y \cdot y) + \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (x \cdot y))$, $(x - \mathsf{i} \cdot y) \cdot (x - \mathsf{i} \cdot y) = (x \cdot x - y \cdot y) - \mathsf{i} \cdot (2 \cdot (x \cdot y))$, $(x + \mathsf{i} \cdot y) \cdot (x - \mathsf{i} \cdot y) = x \cdot x + y \cdot y$ präsentiert. Interessanter Weise folgt aus $x, y \in \mathbb{T}$ die Gleichung $(x + \mathsf{i} \cdot y) \cdot (x - \mathsf{i} \cdot y) = (x \cdot x + y \cdot y) + \mathsf{i} \cdot (x \cdot y - x \cdot y)$, wobei $x \cdot y - x \cdot y$ Null *sein kann, aber nicht sein muss.*

#145. Der Gültigkeits-Bereich der Gleichungen $1 : (x \cdot y) = (1 : x) \cdot (1 : y)$ und $\mathsf{ab2}(x \cdot y) = \mathsf{ab2}(x) \cdot \mathsf{ab2}(y)$ wird erweitert und ausgelotet. Mit den **Divisions-**

KürzungsRegeln $\mathbb{T}$ steht unter anderem die Gleichung $(a \cdot x) : (a \cdot y) = x : y$ für alle reellen $a \neq 0$ und für alle $x, y \in \mathbb{T}$ zur Verfügung.

#146. Es werden die Gleichungen $x : y = 0$ und $x : \mathsf{ab2}(y) = 0$ thematisiert.

#147. Aus $0 < x < y$ und $0 < a \in \mathbb{R}$ folgt $a \cdot x < a \cdot y$. Falls $0 < x < y$ und lediglich $0 < a$ gilt, dann folgt $a \cdot x \leq a \cdot y$. Hieraus ergibt sich unter anderem, dass $x < y$ mit $0 \leq y$ und $0 < a < b$ die Ungleichung $a \cdot x < b \cdot y$ impliziert. Auch wird gezeigt, dass aus $x < y < 0$ und $0 < a < b$ die Ungleichung $b \cdot x < a \cdot y$ folgt.

#148. Nicht zuletzt wegen $1 : x \neq +\infty$ ist $0 < 1 : x$ äquivalent zu $0 < x \in \mathbb{R}$. Auch sind die Aussagen $0 < 1 : x < 1$ und $1 < x \in \mathbb{R}$ sowie $1 < 1 : x$ und $0 < x < 1$ äquivalent.

#149. Konjugiert komplex x wird via $x^{\mathsf{cc}} = (\mathsf{Re}x) - \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$ in die Essays eingeführt und mit der **cc-Notation** wird unter anderem $-x^{\mathsf{cc}} = -(x^{\mathsf{cc}})$ fest gelegt. Die Gleichung $x \cdot x^{\mathsf{cc}} = \mathsf{ab2}(x)$ ist nicht voraussetzungsfrei gültig, sondern gilt genau dann, wenn x keine Zahl oder x eine komplexe oder treelle Zahl ist oder wenn $\mathsf{Re}x = 0$ gilt.

#150. Es gilt $0 \neq x : y \in \mathbb{C}$ genau dann, wenn $0 \neq x, y \in \mathbb{C}$. Falls $0 \neq x : y$ Zahl, so sind sowohl x als auch y Zahlen$\neq 0$. Die Umkehrung hiervon ist *nicht ohne Weiteres* richtig. Auch werden Kriterien für $0 \neq x : y$ Zahl und $0 \neq x : y$ formuliert.

#151. Für komplexe oder reelle x, y, z, w mit $0 \neq y, w$ kann gemäß $x : y + z : w = (x \cdot w + y \cdot z) : (y \cdot w)$ auf gemeinsamen Nenner gebracht werden. Die Gültigkeit dieser Gleichung in anderen Zahlenmengen wird bis auf Weiteres nicht diskutiert.

#152. Vorbereitend werden die Gleichungen $x \cdot y \pm z \cdot w = 0$ diskutiert. Danach werden Kriterien für $(0 \neq)x \cdot y \in \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{A}$ hergeleitet.

#153. Vorbereitend werden die Gleichungen $\mathsf{Re}(1 : x) = 0$ und $\mathsf{Im}(1 : x) = 0$ sowie die Ungleichungen $0 \neq \mathsf{Re}(1 : x)$ und $0 \neq \mathsf{Im}(1 : x)$ diskutiert. Danach werden Kriterien für $(0 \neq)x : y \in \mathbb{R}, \mathbb{S}, \mathbb{T}, \mathbb{C}, \mathbb{A}$ hergeleitet.

#154. Die Termini **keine Algebra in/auf** einer Klasse werden in die Essays eingeführt.

ISBCP: IdentitätsSatz Binär-Cartesisches Produkt.

Ersterstellung: 09/01/08 **Letzte Änderung: 13/01/12**

91-1. Für binär-cartesische Produkte gelten ähnliche Regeln wie für geordnete Paare, siehe **PaarAxiom I**. Hieraus ergeben sich via Negation weitere Aussagen:

91-1(Satz)

a) *Aus* “$x = z$” *folgt* “$x \times y = z \times y$”.

b) *Aus* “$y = w$” *folgt* “$x \times y = x \times w$”.

c) *Aus* “$x = z$” *und* “$y = w$” *folgt* “$x \times y = z \times w$”.

d) *Aus* “$x \times y \neq z \times y$” *folgt* “$x \neq z$”.

e) *Aus* “$x \times y \neq x \times w$” *folgt* “$y \neq w$”.

f) *Aus* “$x \times y \neq z \times w$” *folgt* “$x \neq z$” *oder* “$y \neq w$”.

<u>Beweis **91-1**</u> `a)` `VS` gleich $x = z$.

Aus `VS` gleich “$x = z$”
folgt: $x \times y = z \times y$.

`b)` `VS` gleich $y = w$.

Aus `VS` gleich “$y = w$”
folgt: $x \times y = x \times w$.

`c)` `VS` gleich $(x = z) \wedge (y = w)$.

`1:` Aus `VS` gleich “$x = z \ldots$”
folgt: $x \times y = z \times y$.

`2:` Aus `1`“$x \times y = z \times y$” und
aus `VS` gleich “$\ldots y = w$”
folgt: $x \times y = z \times w$.

`d)`

`1:` Via `a)` gilt: $(x = z) \Rightarrow (x \times y = z \times y)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x \times y = z \times y)) \Rightarrow (\neg(x = z))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \times y \neq z \times y) \Rightarrow (x \neq z)$.

`e)`

`1:` Via `b)` gilt: $(y = w) \Rightarrow (x \times y = x \times w)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x \times y = x \times w)) \Rightarrow (\neg(y = w))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \times y \neq x \times w) \Rightarrow (y \neq w)$.

`f)`

`1:` Via `c)` gilt: $((x = z) \wedge (y = w)) \Rightarrow (x \times y = z \times w)$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\neg(x \times y = z \times w)) \Rightarrow (\neg((x = z) \wedge (y = w)))$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(x \times y \neq z \times w) \Rightarrow ((x \neq z) \vee (y \neq w))$.

□

91-2. Unter welchen Voraussetzungen kann von der Gleichheit $x \times y = z \times w$ zweier binär-cartesischer Prokukte auf $x = z$ und $y = w$ geschlossen werden? Hinreichende Bedingungen sind: $0 \neq x \times y$ oder $0 \neq z \times w$ oder ($0 \neq x$ und $0 \neq y$) oder ($0 \neq z$ und $0 \neq w$).
Zusätzlich folgt in jedem der vier Fälle sowohl $0 \neq x$ als auch $0 \neq y$ als auch $0 \neq z$ als auch $0 \neq w$. Die Beweis-Reihenfolge ist `c) - d) - e) - f) - a) - b)`:

91-2(Satz) (ISBCP: IdentitätsSatz Binär-Cartesisches Produkt)

Es gelte:

→) $x \times y = z \times w$.

→)

$0 \neq x \times y$.

oder

"$0 \neq x$" *und* "$0 \neq y$".

oder

$0 \neq z \times w$.

oder

"$0 \neq z$" *und* "$0 \neq w$".

Dann folgt:

a) $x = z$.

b) $y = w$.

c) $0 \neq x$.

d) $0 \neq y$.

e) $0 \neq z$.

f) $0 \neq w$.

Beweis **91-2**

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt:

$$x \times y \neq 0 \\ \vee \\ (0 \neq x) \wedge (0 \neq y) \\ \vee \\ z \times w \neq 0 \\ \vee \\ (0 \neq z) \wedge (0 \neq w).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq x \times y$.

`2.1:` Aus `1.1.1.Fall`"$0 \neq x \times y$" folgt via **6-13**: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`2.2:` Aus `1.1.1.Fall`"$0 \neq x \times y$" und aus `VS` gleich "$x \times y = z \times w$" folgt: $0 \neq z \times w$.

`3:` Aus `2.2`"$0 \neq z \times w$" folgt via **6-13**: $(0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$.

`4:` Aus `2.1`"$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$" und aus `3`"$(0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$" folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y) \wedge (0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$.

`1.1.2.Fall` $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`2.1:` Aus `1.1.2.Fall`"$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$" folgt via **6-13**: $0 \neq x \times y$.

`2:` Aus `2.1`"$0 \neq x \times y$" und aus `VS` gleich "$x \times y = z \times w$" folgt: $0 \neq z \times w$.

`3:` Aus `2`"$0 \neq z \times w$" folgt via **6-13**: $(0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$.

`4:` Aus `1.1.2.Fall`"$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$" und aus `3`"$(0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$" folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y) \wedge (0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$.

...

Beweis **91-2** . . .

`Fallunterscheidung`

. . .

`1.1.3.Fall` $0 \neq z \times w$.

`2.1:` Aus `1.1.3.Fall`“$0 \neq z \times w$”
folgt via **6-13**: $(0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$.

`2.2:` Aus `1.1.3.Fall`“$0 \neq z \times w$”
und aus `VS` gleich “$x \times y = z \times w$”
folgt: $0 \neq x \times y$.

`3:` Aus `2.2`“$0 \neq x \times y$”
folgt via **6-13**: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`4:` Aus `3`“$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$” und
aus `2.1`“$(0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$”
folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y) \wedge (0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$.

`1.1.4.Fall` $(0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$.

`2.1:` Aus `1.1.4.Fall`“$(0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$”
folgt via **6-13**: $0 \neq z \times w$.

`2:` Aus `2.1`“$0 \neq z \times w$” und
aus `VS` gleich “$x \times y = z \times w$”
folgt: $0 \neq x \times y$.

`3:` Aus `2`“$0 \neq x \times y$”
folgt via **6-13**: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

`4:` Aus `3`“$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$” und
aus `1.1.4.Fall`“$(0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$”
folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y) \wedge (0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

`A1` | “$(0 \neq x) \wedge (0 \neq y) \wedge (0 \neq z) \wedge (0 \neq w)$”

<u>Beweis</u> **91-2** ...

`1.c):` Aus `A1`
folgt: $0 \neq x.$

`1.d):` Aus `A1`
folgt: $0 \neq y.$

`1.e):` Aus `A1`
folgt: $0 \neq z.$

`1.f):` Aus `A1`
folgt: $0 \neq w.$

`1.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq x \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in x.$

`1.3:` Aus `A1` gleich "$\ldots 0 \neq y \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Psi : \Psi \in y.$

`1.4:` Aus `A1` gleich "$\ldots 0 \neq z \ldots$"
folgt via **0-20**: $\exists \Phi : \Phi \in z.$

`1.5:` Aus `A1` gleich "$\ldots 0 \neq w$"
folgt via **0-20**: $\exists \Upsilon : \Upsilon \in w.$

> `Thema2.2` $\alpha \in x.$
>
> `3:` Aus `Thema2.2`"$\alpha \in x$" und
> aus `1.3`"$\ldots \Psi \in y$"
> folgt via **6-6**: $(\alpha, \Psi) \in x \times y.$
>
> `4:` Aus `3`"$(\alpha, \Psi) \in x \times y$" und
> aus `VS` gleich "$x \times y = z \times w$"
> folgt: $(\alpha, \Psi) \in z \times w.$
>
> `5:` Aus `5`"$(\alpha, \Psi) \in z \times w$"
> folgt via **6-6**: $(\alpha \in z) \wedge (\Psi \in w).$
>
> `6:` Aus `5`
> folgt: $\alpha \in z.$

Ergo `Thema3.2`: $\forall \alpha : (\alpha \in x) \Rightarrow (\alpha \in z).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A2` | "$x \subseteq z$"

<u>Beweis</u> **91-2** ...

`Thema2.3` $\alpha \in z.$

`3:` Aus `Thema2.3`"$\alpha \in z$" und
aus `1.5`"$\ldots \Upsilon \in w$"
folgt via **6-6**: $(\alpha, \Upsilon) \in z \times w.$

`4:` Aus `3`"$(\alpha, \Upsilon) \in z \times w$" und
aus `VS` gleich "$x \times y = z \times w$"
folgt: $(\alpha, \Upsilon) \in x \times y.$

`5:` Aus `4`"$(\alpha, \Upsilon) \in x \times y$"
folgt via **6-6**: $(\alpha \in x) \wedge (\Upsilon \in y).$

`6:` Aus `5`
folgt: $\alpha \in x.$

Ergo `Thema2.3`: $\forall \alpha : (\alpha \in z) \Rightarrow (\alpha \in x).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A3` "$z \subseteq x$"

`Thema2.4` $\alpha \in y.$

`3:` Aus `1.2`"$\ldots \Omega \in x$" und
aus `Thema2.4`"$\alpha \in y$"
folgt via **6-6**: $(\Omega, \alpha) \in x \times y.$

`4:` Aus `3`"$(\Omega, \alpha) \in x \times y$" und
aus `VS` gleich "$x \times y = z \times w$"
folgt: $(\Omega, \alpha) \in z \times w.$

`5:` Aus `4`"$(\Omega, \alpha) \in z \times w$"
folgt via **6-6**: $(\Omega \in z) \wedge (\alpha \in w).$

`6:` Aus `5`
folgt: $\alpha \in w.$

Ergo `Thema2.4`: $\forall \alpha : (\alpha \in y) \Rightarrow (\alpha \in w).$

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A4` "$y \subseteq w$"

Beweis **91-2** . . .

$\boxed{\texttt{Thema2.5}}$ $\alpha \in w$.

`3:` Aus `1.4`"$\ldots \Phi \in z$" und
aus `Thema2.5`"$\alpha \in w$"
folgt via **6-6**: $(\Phi, \alpha) \in z \times w$.

`4:` Aus `3`"$(\Phi, \alpha) \in z \times w$" und
aus `VS` gleich "$x \times y = z \times w$"
folgt: $(\Phi, \alpha) \in x \times y$.

`5:` Aus `4`"$(\Phi, \alpha) \in x \times y$"
folgt via **6-6**: $(\Phi \in x) \wedge (\alpha \in y)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $\alpha \in y$.

Ergo `Thema2.5`: $\forall \alpha : (\alpha \in w) \Rightarrow (\alpha \in y)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A5} \mid \text{"} w \subseteq y \text{"}}$

`3.a):` Aus `A2` gleich "$x \subseteq z$" und
aus `A3` gleich "$z \subseteq x$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $x = z$.

`3.b):` Aus `A4` gleich "$y \subseteq w$" und
aus `A5` gleich "$w \subseteq y$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $y = w$.

□

91-3. Via **ISBCP** stellt sich $x = z$, also: die Gleichheit zweier Klassen, als äquivalent zur Gleichheit der binär-cartesischen Produkte $x \times x$ und $z \times z$ heraus - interessanter Weise ohne dass $x = 0$ oder $z = 0$ oder $x \times x = 0$ oder $z \times z = 0$ gesondert behandelt werden müsste:

91-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = z$.

`ii)` $x \times x = z \times z$.

Beweis **91-3** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x = z$.

Aus VS gleich "$x = z$" und
aus VS gleich "$x = z$"
folgt via **91-1**: $x \times x = z \times z$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $x \times x = z \times z$.

1: Es gilt: $x = 0 \vee 0 \neq x$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x = 0$.

2: Aus 1.1.Fall "$x = 0$"
folgt: $(x = 0) \vee (x = 0)$.

3: Aus 2 "$(x = 0) \vee (x = 0)$"
folgt via **6-13**: $x \times x = 0$.

4: Aus 3 "$x \times x = 0$" und
aus VS gleich "$x \times x = z \times z$"
folgt: $z \times z = 0$.

5: Aus 4 "$z \times z = 0$"
folgt via **6-13**: $(z = 0) \vee (z = 0)$.

6: Aus 5
folgt: $z = 0$.

7: Aus 1.1.Fall "$x = 0$" und
aus 6 "$z = 0$"
folgt: $x = z$.

1.2.Fall $0 \neq x$.

Aus VS gleich "$x \times x = z \times z$",
aus 1.2.Fall "$0 \neq x$" und
aus 1.2.Fall "$0 \neq x$"
folgt via **ISBCP**: $x = z$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x = z$.

□

91-4. Via **91-3** folgt aus $x \times x = 0$ die Identität $x = 0$:

91-4(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \times x = 0$.

`ii)` $x = 0$.

Beweis **91-4** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x \times x = 0$.

`1:` Via **6-13** gilt: $0 \times 0 = 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$x \times x = 0$" und
aus `1` "$0 \times 0 = 0$"
folgt: $x \times x = 0 \times 0$.

`3:` Aus `2` "$x \times x = 0 \times 0$"
folgt via **91-3**: $x = 0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x = 0$.

`1:` $x \times x \stackrel{\texttt{VS}}{=} 0 \times 0 \stackrel{\mathbf{6-13}}{=} 0$.

`2:` Aus `1`
folgt: $x \times x = 0$.

□

91-5. Falls $x \times y$ eine Unmenge ist, dann sind x, y ungleich der leeren Menge und x oder y Unmenge:

91-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \times y$ *Unmenge.*

Dann folgt:

a) $0 \neq x$.

b) $0 \neq y$.

c) *"x Unmenge" oder "y Unmenge".*

Beweis **91-5** a)

1: Es gilt: $x = 0 \vee 0 \neq x$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = 0$.

2: Aus `1.1.Fall` "$x = 0$" folgt: $(x = 0) \vee (y = 0)$.

3: Aus 2 "$(x = 0) \vee (y = 0)$" folgt via **6-13**: $x \times y = 0$.

4: Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

5: Aus 3 "$x \times y = 0$" und aus 4 "0 Menge" folgt: $x \times y$ Menge.

6: Es gilt 5 "$x \times y$ Menge". Es gilt $\rightarrow$) "$x \times y$ Unmenge". Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq x$.

`1.2.Fall` $0 \neq x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq x$.

<u>Beweis **91-5** `b)`</u>

`1:` Es gilt: $y=0$
$\vee$
$0 \neq y$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $y=0$.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$y=0$”
folgt: $(x=0) \vee (y=0)$.

`3:` Aus `2`“$(x=0) \vee (y=0)$”
folgt via **6-13**: $x \times y = 0$.

`4:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`5:` Aus `3`“$x \times y = 0$” und
aus `4`“0 Menge”
folgt: $x \times y$ Menge.

`6:` Es gilt `5`“$x \times y$ Menge”.
Es gilt $\rightarrow$)“$x \times y$ Unmenge”.
Ex falso quodlibet folgt: $0 \neq y$.

`1.2.Fall` $0 \neq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 \neq y$.

<u>Beweis</u> **91-5** `c)`

`1:` Es gilt: $(x \text{ Menge}) \wedge (y \text{ Menge})$
$\vee$
$(x \text{ Unmenge}) \vee (y \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \text{ Menge}) \wedge (y \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Menge…" und
aus `1.1.Fall`"…y Menge"
folgt via **Binär-Cartesisches Axiom**: $x \times y$ Menge.

`3:` Es gilt `2`"$x \times y$ Menge".
Es gilt →)"$x \times y$ Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $(x \text{ Unmenge}) \vee (y \text{ Unmenge})$.

`1.2.Fall` $(x \text{ Unmenge}) \vee (y \text{ Unmenge})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(x \text{ Unmenge}) \vee (y \text{ Unmenge})$.

□

91-6. Falls x, y Unmengen sind, dann sind auch $x \times y$ und $y \times x$ Unmengen. Falls x eine Unmenge ist und falls $0 \neq y$, dann sind $x \times y$ und $y \times x$ Unmengen.

91-6(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) x *Unmenge.*

$\rightarrow$) $0 \neq y$. *oder* y *Unmenge.*

Dann folgt:

a) $x \times y$ *Unmenge.*

b) $y \times x$ *Unmenge.*

<u>Beweis **91-6**</u> `a)`

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $0 \neq y$ $\vee$ y Unmenge.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq y$.

`1.1.2.Fall` y Unmenge.

Aus `1.1.2.Fall` "y Unmenge" folgt via **0-17**: $0 \neq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq y$"

`1.2:` Es gilt: $x \times y$ Menge $\vee$ $x \times y$ Unmenge.

`Fallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $x \times y$ Menge.

`2.1:` Aus `1.2.1.Fall` "$x \times y$ Menge" folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{dom}\,(x \times y)$ Menge.

`2.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq y$" folgt via **7-22**: $\mathsf{dom}\,(x \times y) = x$.

`3:` Aus `2.1` "$\mathsf{dom}\,(x \times y)$ Menge" und aus `2.2` "$\mathsf{dom}\,(x \times y) = x$" folgt: x Menge.

`4:` Es gilt `3` "x Menge". Es gilt $\rightarrow$) "x Unmenge". Ex falso quodlibet folgt: $x \times y$ Unmenge.

`1.2.2.Fall` $x \times y$ Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \times y$ Unmenge.

Beweis **91-6** `b)`

`1.1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $0 \neq y$ $\vee$ y Unmenge.

`Fallunterscheidung`

`1.1.1.Fall` $0 \neq y$.

`1.1.2.Fall` y Unmenge.

Aus `1.1.2.Fall` "y Unmenge"
folgt via **0-17**: $0 \neq y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: `A1` | "$0 \neq y$"

`1.2:` Es gilt: $y \times x$ Menge $\vee$ $y \times x$ Unmenge.

`Fallunterscheidung`

`1.2.1.Fall` $y \times x$ Menge.

`2.1:` Aus `1.2.1.Fall` "$y \times x$ Menge"
folgt via $\mathsf{dom}\,\mathsf{ran}$ **Axiom**: $\mathsf{ran}\,(y \times x)$ Menge.

`2.2:` Aus `A1` gleich "$0 \neq y$"
folgt via **7-22**: $\mathsf{ran}\,(y \times x) = x$.

`3:` Aus `2.1` "$\mathsf{ran}\,(y \times x)$ Menge" und
aus `2.2` "$\mathsf{ran}\,(y \times x) = x$"
folgt: x Menge.

`4:` Es gilt `3` "x Menge".
Es gilt $\rightarrow$) "x Unmenge".
Ex falso quodlibet folgt: $y \times x$ Unmenge.

`1.2.2.Fall` $y \times x$ Unmenge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $y \times x$ Unmenge.

$\square$

91-7. Jedes binär-cartesisches Produkt ist als *echte* TeilKlasse von $\mathcal{U}$ ungleich $\mathcal{U}$: Im Speziellen gilt $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$:

91-7(Satz)

$$x \times y \neq \mathcal{U}.$$

Beweis **92-4**

`1.1:` Via **6-12** gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$.

`1.2:` Via **6-12** gilt: $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$.

`1.3:` Via **6-12** gilt: $x \times y \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1.1`"$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}$" und
aus `1.2`"$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \neq \mathcal{U}$"
folgt via **57-1(Def)**: $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$.

`3:` Aus `1.3`"$x \times y \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" und
aus `2`"$\mathcal{U} \times \mathcal{U} \subset \mathcal{U}$"
folgt via **57-15**: $x \times y \subset \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`"$x \times y \subset \mathcal{U}$"
folgt via **57-1(Def)**: $x \times y \neq \mathcal{U}$.

□

91-8. x ist genau dann eine Menge, wenn $x \times x$ eine Menge ist.

91-8(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` x *Menge.*

`ii)` $x \times x$ *Menge.*

Beweis **91-8** `i) ⇒ ii)` `VS` gleich x Menge.

Aus `VS` gleich "x Menge" und
aus `VS` gleich "x Menge"
folgt via **Binär-Cartesisches Axiom**: $x \times x$ Menge.

`ii) ⇒ i)` `VS` gleich $x \times x$ Menge.

`1:` Es gilt: x Menge $\vee$ x Unmenge.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Menge.

`1.2.Fall` x Unmenge.

`2:` Aus `1.2.Fall` "x Unmenge" und
aus `1.2.Fall` "x Unmenge"
folgt via **91-6**: $x \times x$ Unmenge.

`3:` Es gilt `2` "$x \times x$ Unmenge" .
Es gilt `VS` gleich "$x \times x$ Menge" .
Ex falso quodlibet folgt: x Menge.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: x Menge.

□

91-9. Via Negation folgt aus **91-8**:

91-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` x *Unmenge.*

`ii)` $x \times x$ *Unmenge.*

Beweis **91-9**

`1:` Via **91-8** gilt: $(x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \times x \text{ Menge})$.

`2:` Aus `1` folgt: $(\neg(x \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(x \times x \text{ Menge}))$.

`3:` Aus `2` folgt: $(x \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (x \times x \text{ Unmenge})$.

□

Geordnete Paare. Relationen. Funktionen.

Ersterstellung: 12/09/07 **Letzte Änderung: 13/01/12**

92-1. Via Negation ergibt sich aus **6-6** folgendes Kriterium:

92-1(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(p, q) \notin x \times y$.

`ii)` *“$p \notin x$” oder “$q \notin y$”.*

Beweis **92-1**

`1:` Via **6-6** gilt: $$((p, q) \in x \times y) \Leftrightarrow ((p \in x) \wedge (q \in y)).$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(\neg((p, q) \in x \times y)) \Leftrightarrow (\neg((p \in x) \wedge (q \in y))).$$

`3:` Aus `2` folgt: $$((p, q) \notin x \times y) \Leftrightarrow (\neg((p \in x) \wedge (q \in y))).$$

`4:` Aus `3` folgt: $$((p, q) \notin x \times y) \Leftrightarrow ((\neg(p \in x)) \vee (\neg(q \in y))).$$

`5:` Aus `4` folgt: $$((p, q) \notin x \times y) \Leftrightarrow ((p \notin x) \vee (q \notin y)).$$

□

92-2. Falls p oder q eine Unmenge ist, dann folgt $(p,q) \notin x \times y$:

<u>92-2(Satz)</u>

Es gelte:

→) | p *Unmenge.* | *oder* | q *Unmenge.*

Dann folgt "$(p,q) \notin x \times y$".

<u>Beweis **92-2**</u>

1: Nach "→) *oder*" gilt: $(p \text{ Unmenge}) \vee (q \text{ Unmenge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` p Unmenge.

2: Aus `1.1.Fall`"p Unmenge" folgt via **0-1**: $p \notin x$.

3: Aus 2"$p \notin x$" folgt via **92-1**: $(p,q) \notin x \times y$.

`1.2.Fall` q Unmenge.

2: Aus `1.2.Fall`"q Unmenge" folgt via **0-1**: $q \notin y$.

3: Aus 2"$q \notin y$" folgt via **92-1**: $(p,q) \notin x \times y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(p,q) \notin x \times y$.

□

92-3. (p,q) ist genau dann eine Unmenge, wenn p oder q Unmengen sind:

92-3(Satz)

Die Aussagen i), ii) *sind äquivalent:*

i) (p,q) *Unmenge.*

ii) *"p Unmenge" oder "q Unmenge".*

Beweis **92-3**

1: Via **PaarAxiom I** gilt: $((p,q)\text{ Menge}) \Leftrightarrow ((p\text{ Menge}) \wedge (q\text{ Menge}))$.

2: Aus 1
folgt: $(\neg((p,q)\text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg((p\text{ Menge}) \wedge (q\text{ Menge})))$.

3: Aus 2
folgt: $((p,q)\text{ Unmenge}) \Leftrightarrow ((\neg(p\text{ Menge})) \vee (\neg(q\text{ Menge})))$.

4: Aus 3
folgt: $((p,q)\text{ Unmenge}) \Leftrightarrow ((p\text{ Unmenge}) \vee (q\text{ Unmenge}))$.

□

92-4. Aus **PaarAxiom I** ergeben sich via Negation die folgenden Aussagen:

92-4(Satz)

a) *Aus* “$(p,q)\neq(w,q)$” *folgt* “$p\neq w$”.

b) *Aus* “$(p,q)\neq(p,v)$” *folgt* “$q\neq v$”.

c) *Aus* “$(p,q)\neq(w,v)$” *folgt* “$p\neq w$” *oder* “$q\neq v$”.

Beweis **92-4** a)

1: Via **PaarAxiom I** gilt: $(p=w)\Rightarrow((p,q)=(w,q))$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg((p,q)=(w,q)))\Rightarrow(\neg(p=w))$.

3: Aus 2 folgt: $((p,q)\neq(w,q))\Rightarrow(p\neq w)$.

b)

1: Via **PaarAxiom I** gilt: $(q=v)\Rightarrow((p,q)=(p,v))$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg((p,q)=(p,v)))\Rightarrow(\neg(q=v))$.

3: Aus 2 folgt: $((p,q)\neq(p,v))\Rightarrow(q\neq v)$.

c)

1: Via **PaarAxiom I** gilt: $((p=w)\wedge(q=v))\Rightarrow((p,q)=(w,v))$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg((p,q)=(w,v)))\Rightarrow(\neg((p=w)\wedge(q=v)))$.

3: Aus 2 folgt: $((p,q)\neq(w,v))\Rightarrow((p\neq w)\vee(q\neq v))$.

$\square$

92-5. Jede Relation r mit $\mathsf{dom}\, r = 0$ oder $\mathsf{ran}\, r = 0$ ist gleich der leeren Menge. Analoges gilt für Funktionen:

92-5(Satz)

a) *Aus "r Relation" und "$\mathsf{dom}\, r = 0$" folgt "$r = 0$".*

b) *Aus "r Relation" und "$\mathsf{ran}\, r = 0$" folgt "$r = 0$".*

c) *Aus "f Funktion" und "$\mathsf{dom}\, f = 0$" folgt "$f = 0$".*

d) *Aus "f Funktion" und "$\mathsf{ran}\, f = 0$" folgt "$f = 0$".*

<u>Beweis</u> **<u>92-5</u>** `a)` `VS` gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (\mathsf{dom}\, r = 0)$.

1: Aus `VS` gleich "r Relation ... "
folgt via **10-4**: $r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$.

2: Aus 1"$r \subseteq (\mathsf{dom}\, r) \times (\mathsf{ran}\, r)$" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, r = 0$"
folgt: $r \subseteq 0 \times \mathsf{ran}\, r$.

3: Via **6-13** gilt: $0 \times \mathsf{ran}\, r = 0$.

4: Aus 2"$r \subseteq 0 \times \mathsf{ran}\, r$" und
aus 3"$0 \times \mathsf{ran}\, r = 0$"
folgt: $r \subseteq 0$.

5: Aus 4"$r \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $r = 0$.

`b)` `VS` gleich $(r \text{ Relation}) \wedge (\mathsf{ran}\, r = 0)$.

1: Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, r = 0$"
folgt via **7-7**: $\mathsf{dom}\, r = 0$.

2: Aus `VS` gleich "r Relation... " und
aus 1"$\mathsf{dom}\, r = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $r = 0$.

`c)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\, f = 0)$.

1: Aus `VS` gleich "f Funktion... "
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

2: Aus 1"f Relation" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{dom}\, f = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $f = 0$.

`d)` `VS` gleich $(f \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\, f = 0)$.

1: Aus `VS` gleich "f Funktion... "
folgt via **18-18(Def)**: f Relation.

2: Aus 1"f Relation" und
aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{ran}\, f = 0$"
folgt via des bereits bewiesenen `b)`: $f = 0$.

□

Liste der KlassenVariablen, Teil 3. `ALG`-Notation. Algebra in A. Algebra auf Q.

Ersterstellung: 11/09/07 **Letzte Änderung: 13/01/12**

Liste der KlassenVariablen, Teil 3

1) Jedes der folgenden Symbole ist eine KlassenVariable Typ 3:

$$\clubsuit \quad \spadesuit \quad \diamondsuit \quad \heartsuit \quad \square$$

2) Sind "$\%$" und "$\overline{\%}$" KlassenVariable Typ 3,
dann ist "$\%\overline{\%}$" eine KlassenVariable Typ 3.

`ALG`-**Notation.** Je nachdem ob die **RelationsNotation** oder die - gleich definierte - `ALG`-**Notation** bemüht wird, kann die Zeichenkette

$$\text{“}\,q\_\square\_p\text{”}$$

sowohl die *Aussage*

$$\text{“}\,(q,p)\in\square\text{”}$$

als auch die *Klasse*

$$\text{“}\,\square((q,p))\text{”}$$

bezeichnen.
Da im Rahmen der Essays Aussagen keine Klassen und Klassen keine Aussagen sind, ist aus dem Kontext klar, ob eine *Aussage* oder eine *Klasse* gemeint ist, so dass eine Verwechslung trotz identischer Form nicht möglich ist:

<u>`ALG`-Notation</u>

1) $\square(q,p)=\square((q,p))$.

2) $q\_\square\_p=\square((q,p))$.

93-1. Für die `ALG`-Notation gelten allgemeine Ersetzungs-Regeln, die im Folgenden ohne explizite Referenz verwendet werden. Hieraus ergeben sich interessante Umkehrungen:

93-1(Satz)

- a) *Aus* "$q = w$" *folgt* "$q\_\Box\_p = w\_\Box\_p$".
- b) *Aus* "$p = v$" *folgt* "$q\_\Box\_p = q\_\Box\_v$".
- c) *Aus* "$q = w$" *und* "$p = v$" *folgt* "$q\_\Box\_p = w\_\Box\_v$".
- d) *Aus* "$q\_\Box\_p \neq w\_\Box\_p$" *folgt* "$q \neq w$".
- e) *Aus* "$q\_\Box\_p \neq q\_\Box\_v$" *folgt* "$p \neq v$".
- f) *Aus* "$q\_\Box\_p \neq w\_\Box\_v$" *folgt* "$q \neq w$" *oder* "$p \neq v$".

`ALG`-**Notation**.

Beweis **93-1** a) VS gleich $q = w$.

Aus VS gleich "$q = w$"
folgt: $q\_\Box\_p = w\_\Box\_p$.

b) VS gleich $p = v$.

Aus VS gleich "$p = v$"
folgt: $q\_\Box\_p = q\_\Box\_v$.

c) VS gleich $(q = w) \wedge (p = v)$.

1: Aus VS gleich "$q = w \ldots$"
folgt: $q\_\Box\_p = w\_\Box\_p$.

2: Aus 1"$q\_\Box\_p = w\_\Box\_p$" und
aus VS gleich "$\ldots p = v$"
folgt: $q\_\Box\_p = w\_\Box\_v$.

<u>Beweis **93-1**</u> `d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $$(q=w)\Rightarrow(q\_\Box\_p=w\_\Box\_p).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(q\_\Box\_p=w\_\Box\_p))\Rightarrow(\neg(q=w)).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(q\_\Box\_p\neq w\_\Box\_p)\Rightarrow(q\neq w).$$

`e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $$(p=v)\Rightarrow(q\_\Box\_p=q\_\Box\_v).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(q\_\Box\_p=q\_\Box\_v))\Rightarrow(\neg(p=v)).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(q\_\Box\_p\neq q\_\Box\_v)\Rightarrow(p\neq v).$$

`f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt:
$$((q=w)\wedge(p=v))\Rightarrow(q\_\Box\_p=w\_\Box\_v).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(\neg(q\_\Box\_p=w\_\Box\_v))\Rightarrow(\neg((q=w)\wedge(p=v))).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $$(q\_\Box\_p\neq w\_\Box\_v)\Rightarrow((q\neq w)\vee(p\neq v)).$$

$\Box$

93-2. Vor dem Hintergrund, dass $q\_\Box\_p = \Box((q,p))$ gilt, ist das folgende Kriterium für $q\_\Box\_p$ Menge nicht überraschend:

93-2(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $(q,p) \in \mathsf{dom}\,\Box$.

`ii)` $q\_\Box\_p \neq \mathcal{U}$.

`iii)` $q\_\Box\_p$ *Menge.*

`ALG`-**Notation**.

Beweis **93-2**

`1:` Via **17-5** gilt: $((q,p) \in \mathsf{dom}\,\Box) \Leftrightarrow (\Box((q,p)) \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (\Box((q,p))$ Menge$)$.

`2:` Aus "$\Box((q,p)) = q\_\Box\_p$" und
aus `1` "$((q,p) \in \mathsf{dom}\,\Box) \Leftrightarrow (\Box((q,p)) \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (\Box((q,p))$ Menge$)$"
folgt:

$$((q,p) \in \mathsf{dom}\,\Box) \Leftrightarrow (q\_\Box\_p \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (q\_\Box\_p \text{ Menge}).$$

$\Box$

93-3. Via Negation folgt aus **93-2** folgendes Kriterium für $q\_\Box\_p$ Unmenge:

93-3(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) $(q,p)\notin \mathsf{dom}\,\Box$.

ii) $q\_\Box\_p=\mathcal{U}$.

iii) $q\_\Box\_p$ *Unmenge.*

ALG-**Notation**.

Beweis **93-3**

1: Via **93-2** gilt: $((q,p)\in \mathsf{dom}\,\Box)\Leftrightarrow(q\_\Box\_p\neq\mathcal{U})\Leftrightarrow(q\_\Box\_p$ Menge$)$.

2: Aus 1 folgt: $(\neg((q,p)\in \mathsf{dom}\,\Box))\Leftrightarrow(\neg(q\_\Box\_p\neq\mathcal{U}))\Leftrightarrow(\neg(q\_\Box\_p$ Menge$))$.

3: Aus 2 folgt: $((q,p)\notin \mathsf{dom}\,\Box)\Leftrightarrow(q\_\Box\_p=\mathcal{U})\Leftrightarrow(q\_\Box\_p$ Unmenge$)$.

$\Box$

93-4. Unter Zuhilfenahme von **93-2,3** kann Einiges über q_0_p und $q\_\mathcal{U}\_p$ ausgesagt werden:

<u>**93-4(Satz)**</u>

a) $q\_0\_p = \mathcal{U}$.

b) *"$q\_\mathcal{U}\_p = 0$" genau dann, wenn "q Menge" und "p Menge".*

c) *"$q\_\mathcal{U}\_p = \mathcal{U}$" genau dann, wenn "q Unmenge" oder "p Unmenge".*

ALG-<u>**Notation**</u>.

<u>Beweis **93-4**</u> a)

1: $q\_0\_p = 0((q,p)) \overset{\mathbf{17-7}}{=} \mathcal{U}$.

2: Aus 1
folgt: $q\_0\_p = \mathcal{U}$.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $q\_\mathcal{U}\_p = 0$.

1: Via 0$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

2: Aus VS gleich "$q\_\mathcal{U}\_p = 0$" und
aus 1"0 Menge"
folgt: $q\_\mathcal{U}\_p$ Menge.

3: Aus 2"$q\_\mathcal{U}\_p$ Menge"
folgt via **93-2**: $(q,p) \in \mathrm{dom}\,\mathcal{U}$.

4: Aus 3"$(q,p) \in \mathrm{dom}\,\mathcal{U}$"
folgt via **ElementAxiom**: (q,p) Menge.

5: Aus 4"(q,p) Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(q$ Menge$) \wedge (p$ Menge$)$.

<u>Beweis **93-4**</u> `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(q \text{ Menge}) \wedge (p \text{ Menge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "q Menge…" und
aus `VS` gleich "…p Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: (q, p) Menge.

`2:` Aus `1`"(q, p) Menge"
folgt via **17-7**: $\mathcal{U}((q, p)) = 0$.

`3:` Aus "$\mathcal{U}((q, p)) = q\mathcal{U}\_p$" und
aus `2`"$\mathcal{U}((q, p)) = 0$"
folgt: $q\mathcal{U}\_p = 0$.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $q\mathcal{U}\_p = \mathcal{U}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$q\mathcal{U}\_p = \mathcal{U}$"
folgt via **93-3**: $(q, p) \notin \mathsf{dom}\,\mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$(q, p) \notin \mathsf{dom}\,\mathcal{U}$" und
aus **7-11**"$\mathsf{dom}\,\mathcal{U} = \mathcal{U}$"
folgt: $(q, p) \notin \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$(q, p) \notin \mathcal{U}$"
folgt via **0-23**: (q, p) Unmenge.

`4:` Aus `3`"(q, p) Unmenge"
folgt via **92-3**: $(q \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $(q \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(q \text{ Unmenge}) \vee (p \text{ Unmenge})$"
folgt via **92-3**: (q, p) Unmenge.

`2:` Aus `1`"(q, p) Unmenge"
folgt via **0-1**: $(q, p) \notin \mathsf{dom}\,\mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$(q, p) \notin \mathsf{dom}\,\mathcal{U}$"
folgt via **93-3**: $q\mathcal{U}\_p = \mathcal{U}$.

□

93-5. Eine **Algebra in** A ist eine Funktion, die $A \times A$ in A abbildet. Eine **Algebra auf** Q nimmt in jedem $(\alpha, \beta) \in Q \times Q$ einen Wert aus Q an:

93-5(Definition)

1) "$\Box$ **Algebra in** A" genau dann, wenn gilt:

$$\Box : A \times A \to A.$$

2) "$\Box$ **Algebra auf** Q" genau dann, wenn gilt:

$$\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in Q) \wedge (\beta \in Q)) \Rightarrow (\alpha \_ \Box \_ \beta \in Q).$$

ALG-**Notation**.

93-6. Es wird nun ein auf **21-1(Def)** basierendes Kriterium für $\Box$ Algebra in A gegeben:

93-6(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $\Box$ *Algebra in* A.

`ii)` *"*$\Box$ *Funktion" und "*$\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$*" und "*$\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A$*".*

Beweis **93-6** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\Box$ Algebra in A.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **93-5(Def)**: $\Box : A \times A \to A$.

`2:` Aus `1`"$\Box : A \times A \to A$"
folgt via **21-1(Def)**: $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box = A \times A) \wedge (\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A)$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box = A \times A) \wedge (\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\Box = A \times A) \wedge (\mathsf{ran}\,\Box \subseteq A)$"
folgt via **21-1(Def)**: $\Box : A \times A \to A$.

`2:` Aus `1`"$\Box : A \times A \to A$"
folgt via **93-5(Def)**: $\Box$ Algebra in A.

$\Box$

93-7. Auch im folgenden Fall liegt eine Algebra in A vor:

93-7(Satz)

Es gelte:

$\longrightarrow$) $\Box$ *Funktion.*

$\longrightarrow$) $\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$.

$\longrightarrow$) $\mathsf{ran}\,\Box = A$.

Dann folgt "$\Box$ Algebra in A".

Beweis **93-7**

1: Aus $\longrightarrow$) "$\Box$ Funktion",
aus $\longrightarrow$) "$\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$" und
aus $\longrightarrow$) "$\mathsf{ran}\,\Box = A$"
folgt via **21-2**: $\Box : A \times A \to A$.

2: Aus 1"$\Box : A \times A \to A$"
folgt via **93-5(Def)**: $\Box$ Algebra in A.

$\Box$

93-8. Bildet $\Box$ die Klasse $A \times A$ in eine TeilKlasse von A ab, dann ist $\Box$ eine Algebra in A:

93-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\Box : A \times A \to D$.

$\rightarrow$) $D \subseteq A$.

Dann folgt "$\Box$ Algebra in A".

Beweis **93-8**

1: Aus $\rightarrow$) "$\Box : A \times A \to D$" und
aus $\rightarrow$) "$D \subseteq A$"
folgt via **21-5**: $\Box : A \times A \to A$.

2: Aus 1 "$\Box : A \times A \to A$"
folgt via **93-5(Def)**: $\Box$ Algebra in A.

$\Box$

93-9. Ein Algebra in A ist genau dann eine Menge, wenn A eine Menge ist:

93-9(Satz)

Unter der Voraussetzung . . .

→) $\square$ *Algebra in* A.

. . . sind die Aussagen `i)`, `ii)` *äquivalent:*

`i)` $\square$ *Menge.*

`ii)` A *Menge.*

Beweis **93-9** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $\square$ Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "$\square$ Menge"
folgt via dom ran **Axiom**: dom $\square$ Menge.

`2:` Aus →) "$\square$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\square = A \times A$.

`3:` Aus `1` "dom $\square$ Menge" und
aus `2` "$\mathsf{dom}\,\square = A \times A$"
folgt: $A \times A$ Menge.

`4:` Aus `3` "$A \times A$ Menge"
folgt via **91-8**: A Menge.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich A Menge.

`1:` Aus `VS` gleich "A Menge"
folgt via **91-8**: $A \times A$ Menge.

`2:` Aus →) "$\square$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\square = A \times A)$.

`3:` Aus `2` "$\ldots \mathsf{dom}\,\square = A \times A$" und
aus `1` "$A \times A$ Menge"
folgt: dom $\square$ Menge.

`4:` Aus `2` "$\square$ Funktion. . . " und
aus `3` "dom $\square$ Menge"
folgt via **26-3**: $\square$ Menge.

$\square$

93-10. Es gibt höchstens eine Klasse, in der eine Klasse Algebra ist:

93-10(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* A.

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra in* a.

Dann folgt "$A = a$".

Beweis **93-10**

1.1: Aus $\rightarrow$)"$\Box$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$.

1.2: Aus $\rightarrow$)"$\Box$ Algebra in a"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\Box = a \times a$.

2: Aus 1.1"$\mathsf{dom}\,\Box = A \times A$" und
aus 1.2"$\mathsf{dom}\,\Box = a \times a$"
folgt: $A \times A = a \times a$.

3: Aus 2"$A \times A = a \times a$"
folgt via **91-3**: $A = a$.

$\Box$

93-11. Falls $\Box$ Algebra in A ist, so gilt für $w \in A \times A$ erwarteter Weise $\Box(w) \in A$. Hieraus ergibt sich ohne viel weitere Mühe `b)`:

93-11(Satz)

`a)` *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$w \in A \times A$" folgt "$\Box(w) \in A$".*

`b)` *Aus "$\Box$ Algebra in A" und "$(q \in A) \wedge (p \in A)$" folgt "$q\_\Box\_p \in A$".*

`ALG`-**Notation**.

Beweis **93-11** `a)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (w \in A \times A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$"
folgt via **93-5(Def)**: $\Box : A \times A \to A$.

`2:` Aus `1`"$\Box : A \times A \to A$" und
aus `VS` gleich "$\ldots w \in A \times A$"
folgt via **21-4**: $\Box(w) \in A$.

`b)` `VS` gleich $(\Box \text{ Algebra in } A) \wedge (q \in A) \wedge (p \in A)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots q \in A \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in A$"
folgt via **6-6**: $(q, p) \in A \times A$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\Box$ Algebra in $A \ldots$" und
aus `1`"$(q, p) \in A \times A$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $\Box((q, p)) \in A$.

`3:` Aus "$q\_\Box\_p = \Box((q, p))$" und
aus `2`"$\Box((q, p)) \in A$"
folgt: $q\_\Box\_p \in A$.

$\Box$

93-12. Es folgt ein umfangreiches Kriterium für $q, p \in A$, wenn $\square$ eine Algebra in A ist. Die Beweis-Reihenfolge ist `i)` $\Rightarrow$ `ii)` $\Rightarrow$ `iv)` $\Rightarrow$ `vi)` $\Rightarrow$ `i)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `v)` - `vii)` $\Rightarrow$ `i)`:

93-12(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) $\square$ *Algebra in* A.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)` *äquivalent:*

`i)` "$q \in A$" *und* "$p \in A$".

`ii)` $q\_\square\_p \in A$.

`iii)` $p\_\square\_q \in A$.

`iv)` $q\_\square\_p$ *Menge.*

`v)` $p\_\square\_q$ *Menge.*

`vi)` $q\_\square\_p \neq \mathcal{U}$.

`vii)` $p\_\square\_q \neq \mathcal{U}$.

`ALG`-**Notation**.

Beweis **93-12** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(q \in A) \wedge (p \in A)$.

Aus $\rightarrow$) "$\square$ Algebra in A" und
aus `VS` gleich "$(q \in A) \wedge (p \in A)$"
folgt via **93-11**: $q\_\square\_p \in A$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $q\_\square\_p \in A$.

Aus `VS` gleich "$q\_\square\_p \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: $q\_\square\_p$ Menge.

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{vi)}}$ `VS` gleich $q\_\square\_p$ Menge.

Aus `VS` gleich "$q\_\square\_p$ Menge"
folgt via **0-17**: $q\_\square\_p \neq \mathcal{U}$.

Beweis **93-12** $\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $q\_\square\_p \neq \mathcal{U}$.

$\texttt{1:}$ Aus "$\square((q,p)) = q\_\square\_p$" und
aus $\texttt{VS}$ gleich "$q\_\square\_p \neq \mathcal{U}$"
folgt: $\square((q,p)) \neq \mathcal{U}$.

$\texttt{2:}$ Aus $\texttt{1}$"$\square((q,p)) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **17-5**: $(q,p) \in \mathsf{dom}\,\square$.

$\texttt{3:}$ Aus $\rightarrow$)"$\square$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\square = A \times A$.

$\texttt{4:}$ Aus $\texttt{2}$"$(q,p) \in \mathsf{dom}\,\square$" und
aus $\texttt{3}$"$\mathsf{dom}\,\square = A \times A$"
folgt: $(q,p) \in A \times A$.

$\texttt{5:}$ Aus $\texttt{4}$"$(q,p) \in A \times A$"
folgt via **6-6**: $(q \in A) \wedge (p \in A)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $(q \in A) \wedge (p \in A)$.

Aus $\rightarrow$)"$\square$ Algebra in A" und
aus $\texttt{VS}$ gleich "$\ldots p \in A$" und
aus $\texttt{VS}$ gleich "$q \in A \ldots$"
folgt via **93-11**: $p\_\square\_q \in A$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $p\_\square\_q \in A$.

Aus $\texttt{VS}$ gleich "$p\_\square\_q \in A$"
folgt via **ElementAxiom**: $p\_\square\_q$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vii)}}}$ $\texttt{VS}$ gleich $p\_\square\_q$ Menge.

Aus $\texttt{VS}$ gleich "$p\_\square\_q$ Menge"
folgt via **0-17**: $p\_\square\_q \neq \mathcal{U}$.

Beweis **93-12** $\boxed{\boxed{\texttt{vii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $p\_\square\_q \neq \mathcal{U}$.

`1:` Aus "$\square((p,q)) = p\_\square\_q$" und
aus `VS` gleich "$p\_\square\_q \neq \mathcal{U}$"
folgt: $\square((p,q)) \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$\square((p,q)) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **17-5**: $(p,q) \in \mathsf{dom}\,\square$.

`3:` Aus →)"$\square$ Algebra in A"
folgt via **93-6**: $\mathsf{dom}\,\square = A \times A$.

`4:` Aus `2`"$(p,q) \in \mathsf{dom}\,\square$" und
aus `3`"$\mathsf{dom}\,\square = A \times A$"
folgt: $(p,q) \in A \times A$.

`5:` Aus `4`"$(p,q) \in A \times A$"
folgt via **6-6**: $(p \in A) \wedge (q \in A)$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(q \in A) \wedge (p \in A)$.

□

93-13. Das nunmehrige Kriterium folgt via Negation aus **93-12**:

93-13(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

→) $\Box$ *Algebra in* A.

... sind die Aussagen i), ii), iii), iv), v), vi), vii) *äquivalent:*

i) "$q \notin A$" *oder* "$p \notin A$".

ii) $q\_\Box\_p \notin A$.

iii) $p\_\Box\_q \notin A$.

iv) $q\_\Box\_p$ *Unmenge.*

v) $p\_\Box\_q$ *Unmenge.*

vi) $q\_\Box\_p = \mathcal{U}$.

vii) $p\_\Box\_q = \mathcal{U}$.

ALG-**Notation**.

Beweis **93-13**

1: Aus →) "$\Box$ Algebra in A"
folgt via **93-12**:
$$((q \in A) \wedge (p \in A)) \Leftrightarrow (q\_\Box\_p \in A) \Leftrightarrow (p\_\Box\_q \in A)$$
$$\Leftrightarrow (q\_\Box\_p \text{ Menge}) \Leftrightarrow (p\_\Box\_q \text{ Menge})$$
$$\Leftrightarrow (q\_\Box\_p \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (p\_\Box\_q \neq \mathcal{U}).$$

2: Aus 1
folgt:
$$(\neg((q \in A) \wedge (p \in A))) \Leftrightarrow (\neg(q\_\Box\_p \in A)) \Leftrightarrow (\neg(p\_\Box\_q \in A))$$
$$\Leftrightarrow (\neg(q\_\Box\_p \text{ Menge})) \Leftrightarrow (\neg(p\_\Box\_q \text{ Menge}))$$
$$\Leftrightarrow (\neg(q\_\Box\_p \neq \mathcal{U})) \Leftrightarrow (\neg(p\_\Box\_q \neq \mathcal{U})).$$

3: Aus 2
folgt:
$$((q \notin A) \vee (p \notin A))) \Leftrightarrow (q\_\Box\_p \notin A) \Leftrightarrow (p\_\Box\_q \notin A)$$
$$\Leftrightarrow (q\_\Box\_p \text{ Unmenge})) \Leftrightarrow (p\_\Box\_q \text{ Unmenge})$$
$$\Leftrightarrow (q\_\Box\_p = \mathcal{U}) \Leftrightarrow (p\_\Box\_q = \mathcal{U}).$$

$\Box$

93-14. Die folgenden, eher unmotiviert *hier* auftauchenden und der Mengenlehre zuzuordnenden Aussagen bereiten **93-15**, wo 0 auf die "Algebra in ...-Eigenschaft" untersucht wird, vor:

93-14(Satz)

a) $0 : 0 \to 0$.

b) $0 : 0 \times 0 \to 0$.

Beweis **93-14**

1.a): Aus **18-51**"0 Funktion",
aus **7-11**"$\mathsf{dom}\, 0 = 0$" und
aus **7-11**"$\mathsf{ran}\, 0 = 0$"
folgt via **21-2**: $0 : 0 \to 0$.

2: Via **6-13** gilt: $0 \times 0 = 0$.

3.b): Aus 1.a)"$0 : 0 \to 0$" und
aus 2"$0 \times 0 = 0$"
folgt: $0 : 0 \times 0 \to 0$.

□

93-15. Die leere Menge ist unter anderem eine Algebra in 0:

93-15(Satz)

a) 0 *Algebra in* 0.

b) *Aus* "0 *Algebra in* A" *folgt* "$A = 0$".

c) *Aus* "$\Box$ *Algebra in* 0" *folgt* "$\Box = 0$".

Beweis **93-15** a)

Aus **93-14**"$0 : 0 \times 0 \to 0$"
folgt via **93-5(Def)**: 0 Algebra in 0.

b) VS gleich 0 Algebra in A.

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: 0 Algebra in 0.

2: Aus VS gleich "0 Algebra in A" und
aus 1"0 Algebra in 0"
folgt via **93-10**: $A = 0$.

c) VS gleich $\Box$ Algebra in 0.

1: Aus VS gleich "$\Box$ Algebra in 0"
folgt via **93-6**: $(\Box \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{ran}\,\Box \subseteq 0)$.

2: Aus 1"$\ldots \mathsf{ran}\,\Box \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $\mathsf{ran}\,\Box = 0$.

3: Aus 1"$\Box$ Funktion ..." und
aus 2"$\mathsf{ran}\,\Box = 0$"
folgt via **92-5**: $\Box = 0$.

$\square$

93-16. Jede Funktion mit Definitions-Bereich $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ ist eine Algebra in $\mathcal{U}$:

93-16(Satz)

Aus "$\square$ Funktion" und "$\mathsf{dom}\,\square = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" folgt "$\square$ Algebra in $\mathcal{U}$".

Beweis **93-16** `VS` gleich $(\square \text{ Funktion}) \wedge (\mathsf{dom}\,\square = \mathcal{U} \times \mathcal{U})$.

1: Via **0-18** gilt: $\mathsf{ran}\,\square \subseteq \mathcal{U}$.

2: Aus `VS` gleich "$\square$ Funktion…",
aus `VS` gleich "…$\mathsf{dom}\,\square = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$" und
aus 1 "$\mathsf{ran}\,\square \subseteq \mathcal{U}$"
folgt via **93-6**: $\square$ Algebra in $\mathcal{U}$.

$\square$

93-17. Falls $\Box$ Algebra auf Q ist, so gilt $Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box$ und es gelten für Q die ähnlich in **93-11** auftretenden Aussagen `bc)`. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - c) - a)`:

93-17(Satz)

a) *Aus* "$\Box$ *Algebra auf* Q" *folgt* "$Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box$".

b) *Aus* "$\Box$ *Algebra auf* Q" *und* "$w \in Q \times Q$" *folgt* "$\Box(w) \in Q$".

c) *Aus* "$\Box$ *Algebra auf* Q" *und* "$(q \in Q) \wedge (p \in Q)$" *folgt* "$q\_\Box\_p \in Q$".

`ALG`-**Notation**.

<u>Beweis **93-17**</u> `b)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra auf } Q) \wedge (w \in Q \times Q)$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots w \in Q \times Q$"
folgt via **6-5**: $\exists \Omega, \Psi : (\Omega \in Q) \wedge (\Psi \in Q) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra auf $Q \ldots$",
aus `1`"$\ldots \Omega \in Q \ldots$" und
aus `1`"$\ldots \Psi \in Q \ldots$"
folgt via **93-5(Def)**: $\Omega\_\square\_\Psi \in Q$.

`3:` Aus "$\square((\Omega, \Psi)) = \Omega\_\square\_\Psi$" und
aus `2`"$\Omega\_\square\_\Psi \in Q$"
folgt: $\square((\Omega, \Psi)) \in Q$.

`4:` Aus `1`"$\ldots w = (\Omega, \Psi)$" und
aus `3`"$\square((\Omega, \Psi)) \in Q$"
folgt: $\square(w) \in Q$.

`c)` `VS` gleich $(\square \text{ Algebra auf } Q) \wedge (q \in Q) \wedge (p \in Q)$.

Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra auf $Q \ldots$",
aus `VS` gleich "$\ldots q \in Q \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p \in Q$"
folgt via **93-5(Def)**: $q\_\square\_p \in Q$.

`a)`

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$\alpha \in Q \times Q$.
`2:` Aus `VS` gleich "$\square$ Algebra auf Q" und aus `Thema1`"$\alpha \in Q \times Q$" folgt via des bereits bewiesenen `b)`:	$\square(\alpha) \in Q$.
`3:` Aus `2`"$\square(\alpha) \in Q$" folgt via **ElementAxiom**:	$\square(\alpha)$ Menge.
`4:` Aus `3`"$\square(\alpha)$ Menge" folgt via **17-5**:	$\alpha \in \mathsf{dom}\, \square$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in Q \times Q) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{dom}\, \square)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\, \square$.

$\square$

93-18. Jede Klasse - auch 0 und $\mathcal{U}$ - ist eine Algebra auf der leeren Menge und falls die leere Menge eine Algebra auf Q ist, dann folgt $Q = 0$:

93-18(Satz)

a) $\Box$ *Algebra auf* 0.

b) 0 *Algebra auf* 0.

c) $\mathcal{U}$ *Algebra auf* 0.

d) *Aus* "0 *Algebra auf* Q" *folgt* "$Q = 0$".

Beweis **93-18**

ALG-Notation.

---

a)

$\boxed{\texttt{Thema1}}$	$(\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0)$.
Es gilt Thema1 "$\alpha \in 0 \ldots$" .	
Via **0-19** gilt "$\alpha \notin 0$" .	
Ex falso quodlibet folgt:	$\alpha\_\square\_\beta \in 0$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in 0) \wedge (\beta \in 0)) \Rightarrow (\alpha\_\square\_\beta \in 0)$.

Konsequenz via **93-5(Def)**: $\square$ Algebra auf 0.

b)

Aus dem bereits bewiesenen a) folgt: 0 Algebra auf 0.

c)

Aus dem bereits bewiesenen a) folgt: $\mathcal{U}$ Algebra auf 0.

d) VS gleich 0 Algebra auf Q.

1: Aus VS gleich "0 Algebra auf Q"
folgt via **93-17**: $Q \times Q \subseteq \mathrm{dom}\, 0$.

2: Via **7-11** gilt: $\mathrm{dom}\, 0 = 0$.

3: Aus 1 "$Q \times Q \subseteq \mathrm{dom}\, 0$" und
aus 2 "$\mathrm{dom}\, 0 = 0$"
folgt: $Q \times Q \subseteq 0$.

4: Aus 3 "$Q \times Q \subseteq 0$"
folgt via **0-18**: $Q \times Q = 0$.

5: Aus 4 "$Q \times Q = 0$"
folgt via **91-4**: $Q = 0$.

$\square$

93-19. Das nachfolgende Beispiel vorweg nehmend wird hier festgestellt, dass eine Algebra auf Q nicht unbedingt eine Funktion sein muss:

93-19.Bemerkung

Die Aussage
"($\Box$ Algebra auf Q) $\Rightarrow$ ($\Box$ Funktion)"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

93-20. Mit dem folgenden Beispiel wird klar gemacht, dass es durchaus Algebren auf einer Klasse Q gibt, die *keine* Funktionen sind:

<u>93-20.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow$) p Menge.

$\rightarrow$) q Menge.

$\rightarrow$) $p \neq q$.

$\rightarrow$) $\Box = \{((p,p),p),((p,q),p),((p,q),q)\}$.

$\rightarrow$) $Q = \{p\}$.

Dann folgt:

a) $p \_ \Box \_ p = p$.

b) $\Box$ Algebra auf Q.

c) $\Box$ keine Funktion.

Ad c): Es gilt $((p,q),p),((p,q),q) \in \Box$ und $p \neq q$.

93-21. Für Algebren $\Box$ *auf* Q vererbt sich die Mengen-Eigenschaft von $\Box$ auf Q. Wie nachfolgend thematisiert ist die Umkehrung dieser Aussage nicht ohne Weiteres gültig:

93-21(Satz)

Aus "$\Box$ Algebra auf Q" und "$\Box$ Menge" folgt "Q Menge".

Beweis **93-21** VS gleich $(\Box \text{ Algebra auf } Q) \wedge (\Box \text{ Menge})$.

1: Aus VS gleich "$\Box$ Algebra auf $Q \ldots$"
folgt via **93-17**: $Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box$.

2: Aus VS gleich "$\ldots \Box$ Menge"
folgt via dom ran **Axiom**: $\mathsf{dom}\,\Box$ Menge.

3: Aus 2"$\mathsf{dom}\,\Box$ Menge" und
aus 1"$Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $Q \times Q$ Menge.

4: Aus 3"$Q \times Q$ Menge"
folgt via **91-8**: Q Menge.

$\Box$

93-22. Wie durch nachfolgendes Beispiel belegt ist eine Aussage analog zu **93-9** nicht ohne Weiteres für Algebren *auf* Q verfügbar:

93-22.Bemerkung

Die Aussage
"$((\Box$ Algebra auf $Q) \wedge (Q$ Menge$)) \Rightarrow (\Box$ Menge$)$"
nicht ohne Weiteres verfügbar.

93-23. Das nunmehrige Beispiel belegt, dass es Unmengen gibt, die auf einer Menge eine Algebra sind. Konsequenter Weise kann **93-21** nicht ohne Weiteres in eine Äquivalenz übergeführt werden:

<u>93-23.BEISPIEL</u>

Es gelte:

$\rightarrow)$ $\square = \mathcal{U}$.

$\rightarrow)$ $Q = 0$.

Dann folgt:

`a)` $\square$ Algebra auf Q.

`b)` Q Menge.

`c)` $\square$ Unmenge.

Ad `a)`: Via **93-18** ist $\mathcal{U}$ Algebra auf 0.

93-24. Das nachfolgende Beispiel vorwegnehmend wird hier gesagt, dass eine Klasse durchaus Algebra *auf* verschiedenen Klassen sein kann:

93-24.Bemerkung

Die Aussage
"$((\Box \text{ Algebra auf } Q) \wedge (\Box \text{ Algebra auf } q)) \Rightarrow (Q = q)$"
ist nicht ohne Weiteres verfügbar.

93-25. An Hand des nunmehrigen Beispiels wird festgestellt, dass eine Klasse *auf* verschiedenen Klassen Algebra sein kann:

93-25.BEISPIEL

Es gelte:

→) p Menge.

→) w Menge.

→) $p \neq w$.

→) $\square = \{((p,p),p),((w,w),w)\}$.

→) $Q = \{p\}$.

→) $q = \{w\}$.

Dann folgt:

a) $\square$ Algebra auf Q.

b) $\square$ Algebra auf q.

c) $Q \neq q$.

93-26. Jede Algebra *in* A ist eine Algebra *auf* A:

93-26(Satz)

Aus "□ Algebra in A" folgt "□ Algebra auf A".

Beweis **93-26** `VS` gleich □ Algebra in A.

`ALG`-**Notation**.

`Thema1` $(\alpha \in A) \wedge (\beta \in A)$.

2: Aus `VS` gleich "□ Algebra in A",
aus `Thema1`"$\alpha \in A \ldots$" und
aus `Thema1`"$\ldots \beta \in A$"
folgt via **93-12**: $\alpha\_\Box\_\beta \in A$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha, \beta : ((\alpha \in A) \wedge (\beta \in A)) \Rightarrow (\alpha\_\Box\_\beta \in A)$

Konsequenz via **93-5(Def)**: □ Algebra auf A.

□

93-27. Nun wird thematisiert, wie weit eine Algebra *auf* Q von einer Algebra *in* Q "entfernt" ist:

93-27(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra auf* Q.

$\rightarrow$) $\Diamond$ *Einschränkung von* $\Box$ *auf* $Q \times Q$.

$\rightarrow$) $\Diamond$ *Funktion.*

Dann folgt "$\Diamond$ *Algebra in* Q*".*

Beweis **93-27**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$\Box$ Algebra auf Q"
folgt via **93-17**: $Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box$.

`2.1:` Aus `1.1` "$Q \times Q \subseteq \mathsf{dom}\,\Box$"
folgt via **2-10**: $(Q \times Q) \cap \mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$.

`2.2:` Aus $\rightarrow$) "$\Diamond$ Einschränkung von $\Box$ auf $Q \times Q$"
folgt via **15-6**: $\mathsf{dom}\,\Diamond = (Q \times Q) \cap \mathsf{dom}\,\Box$.

`3:` Aus `2.2` "$\mathsf{dom}\,\Diamond = (Q \times Q) \cap \mathsf{dom}\,\Box$" und
aus `2.1` "$(Q \times Q) \cap \mathsf{dom}\,\Box = Q \times Q$"
folgt: `A1` "$\mathsf{dom}\,\Diamond = Q \times Q$"

Beweis **93-27** ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$ $\alpha \in \mathsf{ran}\,\diamondsuit$.

2: Aus Thema1.2“$\alpha \in \mathsf{ran}\,\diamondsuit$”
folgt via **7-7**: $\exists\Omega : (\Omega \in \mathsf{dom}\,\diamondsuit) \wedge ((\Omega, \alpha) \in \diamondsuit)$.

3.1: Aus →)“$\diamondsuit$ Funktion” und
aus 2“$\ldots(\Omega, \alpha) \in \diamondsuit$”
folgt via **18-20**: $\alpha = \diamondsuit(\Omega)$.

3.2: Aus 2“$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,\diamondsuit \ldots$” und
aus A1 gleich “$\mathsf{dom}\,\diamondsuit = Q \times Q$”
folgt: $\Omega \in Q \times Q$.

4: Aus →)“$\square$ Algebra auf Q” und
aus 3.2“$\Omega \in Q \times Q$”
folgt via **93-17**: $\square(\Omega) \in Q$.

5: Aus →)“$\diamondsuit$ Einschränkung von $\square$ auf $Q \times Q$” und
aus 2“$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,\diamondsuit \ldots$”
folgt via **ES**: $\diamondsuit(\Omega) = \square(\Omega)$.

6: Aus 5“$\diamondsuit(\Omega) = \square(\Omega)$” und
aus 4“$\square(\Omega) \in Q$”
folgt: $\diamondsuit(\Omega) \in Q$.

7: Aus 3.1“$\alpha = \diamondsuit(\Omega)$” und
aus 6“$\diamondsuit(\Omega) \in Q$”
folgt: $\alpha \in Q$.

Ergo Thema1.2: $\forall\alpha : (\alpha \in \mathsf{ran}\,\diamondsuit) \Rightarrow (\alpha \in Q)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“}\mathsf{ran}\,\diamondsuit \subseteq Q\text{”}}$

1.3: Aus →)“$\diamondsuit$ Funktion”,
aus A1 gleich “$\mathsf{dom}\,\diamondsuit = Q \times Q$” und
aus A2 gleich “$\mathsf{ran}\,\diamondsuit \subseteq Q$”
folgt via **93-6**: $\diamondsuit$ Algebra in Q.

$\square$

93-28. Falls $\Box$ eine Funktion *und* eine Algebra *auf* Q ist, dann ist die Einschränkung von $\Box$ auf $Q \times Q$ eine Algebra *in* Q:

93-28(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\Box$ *Funktion.*

$\rightarrow$) $\Box$ *Algebra auf* Q.

$\rightarrow$) $\Diamond$ *Einschränkung von* $\Box$ *auf* $Q \times Q$.

Dann folgt "$\Diamond$ *Algebra in* Q*".*

Beweis **93-28**

1: Aus $\rightarrow$) "$\Box$ Funktion" und
aus $\rightarrow$) "$\Diamond$ Einschränkung von $\Box$ auf $Q \times Q$"
folgt via **18-47**: $\Diamond$ Funktion.

2: Aus $\rightarrow$) "$\Box$ Algebra auf Q",
aus $\rightarrow$) "$\Diamond$ Einschränkung von $\Box$ auf $Q \times Q$" und
aus 1 "$\Diamond$ Funktion"
folgt via **93-27**: $\Diamond$ Algebra in Q.

$\Box$

0. $\mathcal{U}$. Ungeordnete Paare. KlassenDifferenz. Wert. Funktionen. zo_E. zo. id_E. id.

Ersterstellung: 04/03/06 **Letzte Änderung: 13/01/12**

94-1. Es folgen einige Aussagen rund um 0 und $\mathcal{U}$. Die Aussagen erscheinen trivial und werden angegeben, um später ohne Weiteres Beweise verkürzend eingesetzt werden zu können:

94-1(Satz)

a) *Aus "$p = 0$" folgt "p Menge".*

b) $\mathcal{U} \notin x$.

c) *Aus "$p = \mathcal{U}$" folgt "$p \notin x$".*

d) *Aus "$p \in x$" folgt "$p \neq \mathcal{U}$".*

Beweis **94-1** a) VS gleich $p = 0$.

1: Via 0$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

2: Aus VS gleich "$p = 0$" und
aus 1 "0 Menge"
folgt: p Menge.

b)

1: Via 0$\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

2: Aus 1 "$\mathcal{U}$ Unmenge"
folgt via **0-1**: $\mathcal{U} \notin x$.

c) VS gleich $p = \mathcal{U}$.

1: Via des bereits bewiesenen b) gilt: $\mathcal{U} \notin x$.

2: Aus VS gleich "$p = \mathcal{U}$" und
aus 1 "$\mathcal{U} \notin x$"
folgt: $p \notin x$.

d) VS gleich $p \in x$.

1: Aus VS gleich "$p \in x$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

2: Aus 1 "p Menge"
folgt via **0-17**: $p \neq \mathcal{U}$.

□

94-2. Ein Ungleichheitsresultat: falls $x = \mathcal{U}$ und y Menge, dann $x \neq y$:

94-2(Satz)

Aus “$x = \mathcal{U}$” und “y Menge” folgt “$x \neq y$”.

Beweis **94-2** `VS` gleich $(x = \mathcal{U}) \wedge (y \text{ Menge})$.

`1:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: $\mathcal{U}$ Unmenge.

`2:` Aus `VS` gleich “$x = \mathcal{U} \ldots$” und
aus `1`“$\mathcal{U}$ Unmenge”
folgt: x Unmenge.

`3:` Aus `2`“x Unmenge” und
aus `VS` gleich “$\ldots y$ Menge”
folgt via **0-1**: $x \neq y$.

□

94-3. Ähnlich wie **2-28** für Singeltons gilt das folgende Resultat für die binäre Vereinigung ungeordneter Paare mit Mengen:

94-3(Satz)

Aus "x Menge" folgt "$\{p,q\}\cup x$ Menge".

Beweis **94-3** `VS` gleich x Menge.

`1:` Via **4-11** gilt: $\{p,q\}$ Menge.

`2:` Aus `1` "$\{p,q\}$ Menge" und aus `VS` gleich "x Menge" folgt via $\cup$**Axiom**: $\{p,q\}\cup x$ Menge.

$\square$

94-4. Nun wird ein Kriterium für $w \in \{p, q\}$ gegeben:

<u>94-4(Satz)</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $w \in \{p, q\}$.

`ii)` *“w Menge” und “$(w = p) \vee (w = q)$”.*

`iii)` *“$(p$ Menge$) \wedge (w = p)$” oder “$(q$ Menge$) \wedge (w = q)$”.*

<u>Beweis **94-4**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $w \in \{p, q\}$.

`1.1`: Aus `VS` gleich “$w \in \{p, q\}$”
folgt via **ElementAxiom**: w Menge.

`1.2`: Aus `VS` gleich “$w \in \{p, q\}$”
folgt via **4-9**: $(w = p) \vee (w = q)$.

`2`: Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(w \text{ Menge}) \wedge ((w = p) \vee (w = q))$.

Beweis **94-4** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $(w \text{ Menge}) \wedge ((w = p) \vee (w = q))$.

`1:` Aus `VS` gleich "$(w \text{ Menge}) \wedge ((w = p) \vee (w = q))$"
folgt: $((w \text{ Menge}) \wedge (w = p)) \vee ((w \text{ Menge}) \wedge (w = q))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(w \text{ Menge}) \wedge (w = p)$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots w = p$" und
aus `1.1.Fall`"w Menge…"
folgt: p Menge.

`3:` Aus `2`"p Menge" und
aus `1.1.Fall`"$\ldots w = p$"
folgt: $(p \text{ Menge}) \wedge (w = p)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $((p \text{ Menge}) \wedge (w = p)) \vee ((q \text{ Menge}) \wedge (w = q))$.

`1.2.Fall` $(w \text{ Menge}) \wedge (w = q)$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"w Menge…" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots w = q$"
folgt: q Menge.

`3:` Aus `2`"q Menge" und
aus `1.2.Fall`"$\ldots w = q$"
folgt: $(q \text{ Menge}) \wedge (w = p)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $((p \text{ Menge}) \wedge (w = p)) \vee ((q \text{ Menge}) \wedge (w = q))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$((p \text{ Menge}) \wedge (w = p)) \vee ((q \text{ Menge}) \wedge (w = q))$.

Beweis **94-4** $\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$

`VS` gleich $((p \text{ Menge}) \wedge (w = p)) \vee ((q \text{ Menge}) \wedge (w = q))$.

1: Nach `VS` gilt: $((p \text{ Menge}) \wedge (w = p)) \vee ((q \text{ Menge}) \wedge (w = q))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(p \text{ Menge}) \wedge (w = p)$.

2: Aus `1.1.Fall`“p Menge...” folgt via **4-9**: $p \in \{p, q\}$.

3: Aus `1.1.Fall`“...$w = p$” und aus 2“$p \in \{p, q\}$” folgt: $w \in \{p, q\}$.

`1.2.Fall` $(q \text{ Menge}) \wedge (w = q)$.

2: Aus `1.2.Fall`“q Menge...” folgt via **4-9**: $q \in \{p, q\}$.

3: Aus `1.2.Fall`“...$w = q$” und aus 2“$q \in \{p, q\}$” folgt: $w \in \{p, q\}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $w \in \{p, q\}$.

□

94-5. Via Negation ergibt sich aus **94-4** das vorliegende Kriterium:

94-5(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) $w \notin \{p, q\}$.

ii) "w *Unmenge*" *oder* "$(w \neq p) \wedge (w \neq q)$".

iii) "$(p$ *Unmenge*$) \vee (w \neq p)$" *und* "$(q$ *Unmenge*$) \vee (w \neq q)$".

Beweis **94-5**

1: Via **94-4** gilt:
$$w \in \{p, q\}$$
$$\Leftrightarrow ((w \text{ Menge}) \wedge ((w = p) \vee (w = q)))$$
$$\Leftrightarrow (((p \text{ Menge}) \wedge (w = p)) \vee ((q \text{ Menge}) \wedge (w = q))).$$

2: Aus 1 folgt:
$$\neg(w \in \{p, q\})$$
$$\Leftrightarrow (\neg((w \text{ Menge}) \wedge ((w = p) \vee (w = q))))$$
$$\Leftrightarrow (\neg(((p \text{ Menge}) \wedge (w = p)) \vee ((q \text{ Menge}) \wedge (w = q)))).$$

3: Aus 2 folgt:
$$(w \notin \{p, q\})$$
$$\Leftrightarrow ((\neg(w \text{ Menge})) \vee (\neg((w = p) \vee (w = q))))$$
$$\Leftrightarrow (\neg((p \text{ Menge}) \wedge (w = p)) \wedge (\neg((q \text{ Menge}) \wedge (w = q)))).$$

4: Aus 3 folgt:
$$(w \notin \{p, q\})$$
$$\Leftrightarrow ((w \text{ Unmenge}) \vee ((\neg(w = p)) \wedge (\neg(w = q))))$$
$$\Leftrightarrow (((\neg(p \text{ Menge})) \vee (\neg(w = p))) \wedge ((\neg(q \text{ Menge})) \vee (\neg(w = q)))).$$

5: Aus 4 folgt:
$$(w \notin \{p, q\})$$
$$\Leftrightarrow ((w \text{ Unmenge}) \vee ((w \neq p) \wedge (w \neq q)))$$
$$\Leftrightarrow (((p \text{ Unmenge}) \vee (w \neq p)) \wedge ((q \text{ Unmenge}) \vee (w \neq q))).$$

□

94-6. Die KlassenDifferenz einer Menge und einer beliebigen Klasse ist eine Menge. Jedes Element von x ist in y oder in $x \setminus y$:

94-6(Satz)

a) *Aus "x Menge" folgt "$x \setminus y$ Menge".*

b) *Aus "$p \in x$" folgt "$p \in y$" oder "$p \in x \setminus y$".*

Beweis **94-6** a) VS gleich x Menge.

1: Via **5-5** gilt: $x \setminus y \subseteq x$.

2: Aus VS gleich "x Menge" und
aus 1 "$x \setminus y \subseteq x$"
folgt via **TeilMengenAxiom**: $x \setminus y$ Menge.

b) VS gleich $p \in x$.

1: Es gilt: $(p \in y) \vee (p \notin y)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $p \in y$.
Aus 1.1.Fall
folgt: $(p \in y) \vee (p \in x \setminus y)$.

1.2.Fall $p \notin y$.

2: Aus VS gleich "$p \in x$" und
aus 1.2.Fall "$p \notin y$"
folgt via **5-3**: $p \in x \setminus y$.

3: Aus 2
folgt: $(p \in y) \vee (p \in x \setminus y)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $(p \in y) \vee (p \in x \setminus y)$.

□

94-7. Weder p noch q ist in $x \setminus \{p, q\}$:

94-7(Satz)

a) $p \notin x \setminus \{p, q\}$.

b) $q \notin x \setminus \{p, q\}$.

Beweis **94-7** a)

1: Es gilt: $(p \in x \setminus \{p, q\}) \vee (p \notin x \setminus \{p, q\})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $p \in x \setminus \{p, q\}$.

2.1: Aus 1.1.Fall"$p \in x \setminus \{p, q\}$"
folgt via **ElementAxiom**: p Menge.

2.2: Aus 1.1.Fall"$p \in x \setminus \{p, q\}$"
folgt via **5-3**: $p \notin \{p, q\}$.

3: Aus 2.1"p Menge"
folgt via **4-9**: $p \in \{p, q\}$.

4: Es gilt 3"$p \in \{p, q\}$".
Es gilt 2.2"$p \notin \{p, q\}$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \notin x \setminus \{p, q\}$.

1.2.Fall $p \notin x \setminus \{p, q\}$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $p \notin x \setminus \{p, q\}$.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $q \notin x \setminus \{q, p\}$.

2: Via **4-11** gilt: $\{q, p\} = \{p, q\}$.

3: Aus 2"$\{q, p\} = \{p, q\}$"
folgt: $x \setminus \{q, p\} = x \setminus \{p, q\}$.

4: Aus 1"$q \notin x \setminus \{q, p\}$" und
aus 3"$x \setminus \{q, p\} = x \setminus \{p, q\}$"
folgt: $q \notin x \setminus \{p, q\}$.

□

94-8. Später kann dieses Resultat verkürzend eingesetzt werden:

94-8(Satz)

a) *Aus* "$w \in \{p\} \cup x$" *folgt* "$w = p$" *oder* "$w \in x$".

b) *Aus* "$w \in \{p, q\} \cup x$" *folgt* "$w = p$" *oder* "$w = q$" *oder* "$w \in x$".

<u>Beweis **94-8**</u> `a)` `VS` gleich $w \in \{p\} \cup x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{p\} \cup x$"
folgt via **2-2**: $(w \in \{p\}) \vee (w \in x).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $w \in \{p\}.$

`2:` Aus `1.1.Fall` "$w \in \{p\}$"
folgt via **1-6**: $w = p.$

`3:` Aus `2`
folgt: $(w = p) \vee (w \in x).$

`1.2.Fall` $w \in x.$

Aus `1.2.Fall` "$w \in x$"
folgt: $(w = p) \vee (w \in x).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(w = p) \vee (w \in x).$

`b)` `VS` gleich $w \in \{p, q\} \cup x.$

`1:` Aus `VS` gleich "$w \in \{p, q\} \cup x$"
folgt via **2-2**: $(w \in \{p, q\}) \vee (w \in x).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $w \in \{p, q\}.$

`2:` Aus `1.1.Fall` "$w \in \{p, q\}$"
folgt via **4-9**: $(w = p) \vee (w = q).$

`3:` Aus `2`
folgt: $(w = p) \vee (w = q) \vee (w \in x).$

`1.2.Fall` $w \in x.$

Aus `1.2.Fall` "$w \in x$"
folgt: $(w = p) \vee (w = q) \vee (w \in x).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(w = p) \vee (w = q) \vee (w \in x).$

□

94-9. Nun wird ein "$\cap$Einschließungsprinzip" bewiesen:

94-9(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \subseteq y \subseteq z$.

$\rightarrow$) $x \cap E = D$.

$\rightarrow$) $z \cap E = D$.

Dann folgt "$y \cap E = D$".

Beweis **94-9**

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$x \subseteq y \ldots$"
folgt via **2-15**: $x \cap E \subseteq y \cap E$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "$\ldots y \subseteq z$"
folgt via **2-15**: $y \cap E \subseteq z \cap E$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \cap E \subseteq y \cap E$" und
aus $\rightarrow$) "$x \cap E = D$"
folgt: $D \subseteq y \cap E$.

`2.2:` Aus `1.2`"$y \cap E \subseteq z \cap E$" und
aus $\rightarrow$) "$z \cap E = D$"
folgt: $y \cap E \subseteq D$.

`3:` Aus `2.2`"$y \cap E \subseteq D$" und
aus `2.1`"$D \subseteq y \cap E$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $y \cap E = D$.

$\square$

94-10. Ist der Wert von x in p ungleich dem Wert von x in q, so folgt $p \neq q$:

94-10(Satz)

Aus "$x(p) \neq x(q)$" folgt "$p \neq q$".

Beweis **94-10**

1: Es gilt: $(p = q) \vee (p \neq q)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $p = q$.

2: Aus `1.1.Fall` "$p = q$" folgt: $x(p) = x(q)$.

3: Es gilt 2 "$x(p) = x(q)$".
Es gilt →) "$x(p) \neq x(q)$".
Ex falso quodlibet folgt: $p \neq q$.

`1.2.Fall` $p \neq q$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $p \neq q$.

□

94-11. Nun wird **17-5** für $f : D \to B$ adaptiert. Die Beweis-Reihenfolge ist `i)` $\Rightarrow$ `iv)` $\Rightarrow$ `iii)` $\Rightarrow$ `ii)`:

94-11(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

$\rightarrow$) $f : D \to B$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $f(p) \neq \mathcal{U}$.

`ii)` $f(p)$ *Menge.*

`iii)` $f(p) \in B$.

`iv)` $p \in D$.

<u>Beweis **94-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $f(p) \neq \mathcal{U}$.

1: Aus `VS` gleich “$f(p) \neq \mathcal{U}$”
folgt via **17-5**: $p \in \mathsf{dom}\, f$.

2: Aus →) “$f : D \to B$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

3: Aus 1“$p \in \mathsf{dom}\, f$” und
aus 2“$\mathsf{dom}\, f = D$”
folgt: $p \in D$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $p \in D$.

Aus →) “$f : D \to B$” und
aus `VS` gleich “$p \in D$”
folgt via **21-4**: $f(p) \in B$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $f(p) \in B$.

Aus `VS` gleich “$f(p) \in B$”
folgt via **ElementAxiom**: $f(p)$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $f(p)$ Menge.

Aus `VS` gleich “$f(p)$ Menge”
folgt via **0-17**: $f(p) \neq \mathcal{U}$.

□

94-12. Via Negation folgt aus **94-11** das vorliegende Kriterium:

94-12(Satz)

Unter der Voraussetzung ...

→) $f : D \to B$.

... sind die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)` *äquivalent:*

`i)` $f(p) = \mathcal{U}$.

`ii)` $f(p)$ *Unmenge.*

`iii)` $f(p) \notin B$.

`iv)` $p \notin D$.

Beweis **94-12**

`1:` Aus →) "$f : D \to B$"
folgt via **94-11**:

$$f(p) \neq \mathcal{U}$$
$$\Leftrightarrow (f(p) \text{ Menge})$$
$$\Leftrightarrow (f(p) \in B)$$
$$\Leftrightarrow (p \in D).$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$\neg(f(p) \neq \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (\neg(f(p) \text{ Menge}))$$
$$\Leftrightarrow (\neg(f(p) \in B))$$
$$\Leftrightarrow (\neg(p \in D)).$$

`3:` Aus `2`
folgt:

$$f(p) = \mathcal{U}$$
$$\Leftrightarrow (f(p) \text{ Unmenge})$$
$$\Leftrightarrow (f(p) \notin B)$$
$$\Leftrightarrow (p \notin D).$$

□

94-13. Nun wird **8-10** für $f : D \to B$ adaptiert:

94-13(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $f : D \to B$.

Dann folgt:

a) $f[E] \subseteq B$.

b) $f[E] = f[E \cap D]$.

Beweis **94-13** a)

1: Aus $\rightarrow$) "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ran}\, f \subseteq B$.

2: Via **8-10** gilt: $f[E] \subseteq \mathsf{ran}\, f$.

3: Aus 2"$f[E] \subseteq \mathsf{ran}\, f$" und
aus 1"$\mathsf{ran}\, f \subseteq B$"
folgt via **0-6**: $f[E] \subseteq B$.

b)

1: Aus $\rightarrow$) "$f : D \to B$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{dom}\, f = D$.

2: $f[E] \stackrel{\mathbf{8-10}}{=} f[E \cap \mathsf{dom}\, f] \stackrel{1}{=} f[E \cap D]$.

3: Aus 2
folgt: $f[E] = f[E \cap D]$.

$\square$

94-14. Hier wird Einiges über Bilder unter zo_E und zo gesagt:

<u>**94-14(Satz)**</u>

a) $\mathsf{zo}_E[C] \subseteq \{0\}$.

b) *"$\mathsf{zo}_E[C] = 0$" genau dann, wenn "$E \cap C = 0$".*

c) *"$\mathsf{zo}_E[C] = \{0\}$" genau dann, wenn "$0 \neq E \cap C$".*

d) $\mathsf{zo}[C] \subseteq \{0\}$.

e) *"$\mathsf{zo}[C] = 0$" genau dann, wenn "$C = 0$".*

f) *"$\mathsf{zo}[C] = \{0\}$" genau dann, wenn "$0 \neq C$".*

<u>Beweis **94-14**</u> a)

1: Via **8-10** gilt: $\mathsf{zo}_E[C] \subseteq \mathsf{ran}(\mathsf{zo}_E)$.

2: Via **20-5** gilt: $\mathsf{ran}(\mathsf{zo}_E) \subseteq \{0\}$.

3: Aus 1"$\mathsf{zo}_E[C] \subseteq \mathsf{ran}(\mathsf{zo}_E)$" und
aus 2"$\mathsf{ran}(\mathsf{zo}_E) \subseteq \{0\}$"
folgt via **0-6**: $\mathsf{zo}_E[C] \subseteq \{0\}$.

b) $\boxed{\Rightarrow}$ VS gleich $\mathsf{zo}_E[C] = 0$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{zo}_E[C] = 0$"
folgt via **8-13**: $C \cap \mathsf{dom}(\mathsf{zo}_E) = 0$.

2: $E \cap C \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} C \cap E \stackrel{\mathbf{20-5}}{=} C \cap \mathsf{dom}(\mathsf{zo}_E) \stackrel{1}{=} 0$.

3: Aus 2
folgt: $E \cap C = 0$.

<u>Beweis</u> **94-14** `b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $E \cap C = 0$.

`1:` $C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) \stackrel{\mathbf{20-5}}{=} C \cap E \stackrel{\mathbf{KG}\cap}{=} E \cap C \stackrel{\mathtt{VS}}{=} 0.$

`2:` Aus `1`“$C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = \ldots = 0$”
folgt via **8-13**: $\mathsf{zo}_E[C] = 0$.

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{zo}_E[C] = \{0\}$.

`1:` Via **1-5** gilt: $0 \neq \{0\}$.

`2:` Aus `1`“$0 \neq \{0\}$” und
aus `VS` gleich “$\mathsf{zo}_E[C] = \{0\}$”
folgt: $0 \neq \mathsf{zo}_E[C]$.

`3:` Aus `2`“$0 \neq \mathsf{zo}_E[C]$”
folgt via **8-14**: $0 \neq C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$.

`4:` Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$.

`5:` Aus `3`“$0 \neq C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$” und
aus `4`“$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$”
folgt: $0 \neq C \cap E$.

`6:` Via **KG**$\cap$ gilt: $C \cap E = E \cap C$.

`7:` Aus `5`“$0 \neq C \cap E$” und
aus `6`“$C \cap E = E \cap C$”
folgt: $0 \neq E \cap C$.

Beweis **94-14** c) $\boxed{\Leftarrow}$ VS gleich $0 \neq E \cap C$.

1: Via **20-5** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$.

2: Via **KG**$\cap$ gilt: $E \cap C = C \cap E$.

3: Aus VS gleich "$0 \neq E \cap C$" und
aus 2"$E \cap C = C \cap E$"
folgt: $0 \neq C \cap E$.

4: Aus 3"$0 \neq C \cap E$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$"
folgt: $0 \neq C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$.

5: Aus 4"$0 \neq C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$"
folgt via **0-20**: $\exists \Omega : \Omega \in C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$.

6: Aus 5"$\ldots \Omega \in C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$"
folgt via **2-2**: $(\Omega \in C) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E))$.

7.1: Via **20-5** gilt: zo_E Funktion.

7.2: Aus 6"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$" und
aus 1"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E) = E$"
folgt: $\Omega \in E$.

8: Aus 7.1"zo_E Funktion" und
aus 5"$\ldots \Omega \in C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{zo}_E)$"
folgt via **18-27**: $\mathsf{zo}_E(\Omega) \in \mathsf{zo}_E[C]$.

9: Aus 7.2"$\Omega \in E$"
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_E(\Omega) = 0$.

10: Aus 8"$\mathsf{zo}_E(\Omega) \in \mathsf{zo}_E[C]$" und
aus 9"$\mathsf{zo}_E(\Omega) = 0$"
folgt: $0 \in \mathsf{zo}_E[C]$.

11: Aus 10"$0 \in \mathsf{zo}_E[C]$"
folgt via **1-8**: $\{0\} \subseteq \mathsf{zo}_E[C]$.

12: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathsf{zo}_E[C] \subseteq \{0\}$.

13: Aus 12"$\mathsf{zo}_E[C] \subseteq \{0\}$" und
aus 11"$\{0\} \subseteq \mathsf{zo}_E[C]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{zo}_E[C] = \{0\}$.

Beweis **94-14** `d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}[C] \subseteq \{0\}$.

`2:` Via **20-1(Def)** gilt: $\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$.

`3:` Aus `1`“$\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}[C] \subseteq \{0\}$” und
aus `2`“$\mathsf{zo} = \mathsf{zo}_{\mathcal{U}}$”
folgt: $\mathsf{zo}[C] \subseteq \{0\}$.

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}[C] = 0) \Leftrightarrow (\mathcal{U} \cap C = 0)$.

`1.2:` Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap C = C$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}[C] = 0) \Leftrightarrow (C = 0)$.

`2.2:` Via **20-1(Def)** gilt: $\mathsf{zo}_{\mathcal{U}} = \mathsf{zo}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\mathsf{zo}[C] = 0) \Leftrightarrow (C = 0)$.

`f)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}[C] = \{0\}) \Leftrightarrow (0 \neq \mathcal{U} \cap C)$.

`1.2:` Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap C = C$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\mathsf{zo}_{\mathcal{U}}[C] = \{0\}) \Leftrightarrow (0 \neq C)$.

`2.2:` Via **20-1(Def)** gilt: $\mathsf{zo}_{\mathcal{U}} = \mathsf{zo}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\mathsf{zo}[C] = \{0\}) \Leftrightarrow (0 \neq C)$.

□

94-15. Nun wird Einiges über Bilder unter id_E und id bewiesen:

94-15(Satz)

a) $\mathsf{id}_E[C] = E \cap C$.

b) *"$\mathsf{id}_E[C] = 0$" genau dann, wenn "$E \cap C = 0$".*

c) *"$\mathsf{id}_E[C] = C$" genau dann, wenn "$C \subseteq E$".*

d) $\mathsf{id}[C] = C$.

e) *"$\mathsf{id}[C] = 0$" genau dann, wenn "$C = 0$".*

<u>Beweis **94-15**</u> `a)`

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$ $\alpha \in \mathsf{id}_E[C]$.

`2.1:` Via **20-11** gilt: id_E Funktion.

`2.2:` Via **20-11** gilt: $\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$.

`3:` Aus `2`"id_E Funktion..." und
aus `Thema1.1`"$\alpha \in \mathsf{id}_E[C]$"
folgt via **18-28**:
$$\exists \Omega : (\alpha = \mathsf{id}_E(\Omega)) \wedge (\Omega \in C) \wedge (\Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)).$$

`4:` Aus `3`"$\ldots \Omega \in \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$" und
aus `2.2`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$"
folgt: $\Omega \in E$.

`5.1:` Aus `4`"$\Omega \in E$" und
aus `3`"$\ldots \Omega \in C \ldots$"
folgt via **2-2**: $\Omega \in E \cap C$.

`5.2:` Aus `4`"$\Omega \in E$"
folgt via **20-11**: $\mathsf{id}_E(\Omega) = \Omega$.

`6:` Aus `3`"$\ldots \alpha = \mathsf{id}_E(\Omega) \ldots$" und
aus `5.2`"$\mathsf{id}_E(\Omega) = \Omega$"
folgt: $\alpha = \Omega$.

`7:` Aus `6`"$\alpha = \Omega$" und
aus `5.1`"$\Omega \in E \cap C$"
folgt: $\alpha \in E \cap C$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{id}_E[C]) \Rightarrow (\alpha \in E \cap C)$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\mathsf{id}_E[C] \subseteq E \cap C\text{”}}$

...

<u>Beweis</u> **94-15** `a)` ...

$\boxed{\texttt{Thema1.2}}$	$\alpha \in E \cap C$.
`2.1:` Via **KG**$\cap$ gilt:	$E \cap C = C \cap E$.
`2.2:` Via **20-11** gilt:	id_E Funktion.
`2.3:` Via **20-11** gilt:	$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$.
`3:` Aus `Thema1.2`"$\alpha \in E \cap C$" und aus `2.1`"$E \cap C = C \cap E$" folgt:	$\alpha \in C \cap E$.
`4:` Aus `3`"$\alpha \in C \cap E$" und aus `2.3`"$\mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E) = E$" folgt:	$\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$.
`5:` Aus `2.2`"id_E Funktion" und aus `4`"$\alpha \in C \cap \mathsf{dom}\,(\mathsf{id}_E)$" folgt via **18-27**:	$\mathsf{id}_E(\alpha) \in \mathsf{id}_E[C]$.
`6:` Aus `3`"$\alpha \in C \cap E$" folgt via **2-2**:	$\alpha \in E$.
`7:` Aus `6`"$\alpha \in E$" folgt via **20-11**:	$\mathsf{id}_E(\alpha) = \alpha$.
`8:` Aus `5`"$\mathsf{id}_E(\alpha) \in \mathsf{id}_E[C]$" und aus `7`"$\mathsf{id}_E(\alpha) = \alpha$" folgt:	$\alpha \in \mathsf{id}_E[C]$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in E \cap C) \Rightarrow (\alpha \in \mathsf{id}_E[C])$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\boxed{\texttt{A2} \mid \text{“} E \cap C \subseteq \mathsf{id}_E[C] \text{”}}$

`2:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{id}_E[C] \subseteq E \cap C$" und
aus `A2` gleich "$E \cap C \subseteq \mathsf{id}_E[C]$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{id}_E[C] = E \cap C$.

Beweis **94-15** `b)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{id}_E[C]=0.$

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{id}_E[C]=E\cap C.$

`2:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{id}_E[C]=0$" und
aus `1`"$\mathsf{id}_E[C]=E\cap C$"
folgt: $E\cap C=0.$

`b)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $E\cap C=0.$

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{id}_E[C]=E\cap C.$

`2:` Aus `1`"$\mathsf{id}_E[C]=E\cap C$" und
aus `VS` gleich "$E\cap C=0$"
folgt: $\mathsf{id}_E[C]=0.$

`c)` $\boxed{\Rightarrow}$ `VS` gleich $\mathsf{id}_E[C]=C.$

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{id}_E[C]=E\cap C.$

`2:` Aus `1`"$\mathsf{id}_E[C]=E\cap C$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{id}_E[C]=C$"
folgt: $E\cap C=C.$

`3:` Aus `2`"$E\cap C=C$"
folgt via **2-10**: $C\subseteq E.$

`c)` $\boxed{\Leftarrow}$ `VS` gleich $C\subseteq E.$

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{id}_E[C]=E\cap C.$

`2:` Aus `VS` gleich "$C\subseteq E$"
folgt via **2-10**: $E\cap C=C.$

`3:` Aus `1`"$\mathsf{id}_E[C]=E\cap C$" und
aus `2`"$E\cap C=C$"
folgt: $\mathsf{id}_E[C]=C.$

<u>Beweis</u> **94-15** `d)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}[C] = \mathcal{U} \cap C$.

`1.2:` Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap C = C$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}}[C] = C$.

`2.2:` Via **20-7(Def)** gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}} = \mathsf{id}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\mathsf{id}[C] = C$.

`e)`

`1.1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(\mathsf{id}_{\mathcal{U}}[C] = 0) \Leftrightarrow (\mathcal{U} \cap C = 0)$.

`1.2:` Via **2-17** gilt: $\mathcal{U} \cap C = C$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $(\mathsf{id}_{\mathcal{U}}[C] = 0) \Leftrightarrow (C = 0)$.

`2.2:` Via **20-7(Def)** gilt: $\mathsf{id}_{\mathcal{U}} = \mathsf{id}$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(\mathsf{id}[C] = 0) \Leftrightarrow (C = 0)$.

$\square$

1. nan. $+\infty$. $-\infty$. ∞. i. $\mathbb{A}$. $\mathbb{R}$. $\mathbb{S}$. $\mathbb{T}$. ParameterAxiom I. AAI: Arithmetisches Axiom I. Zahlen. reelle Zahlen. imaginäre Einheit. sreelle Zahlen. treelle Zahlen.

Ersterstellung: 14/09/07 **Letzte Änderung: 23/01/12**

95-1. Hiermit betritt die 1 die Essays:

95-1(Definition)

$$1 = \{0\}.$$

95-2. Die 1 ist eine nicht leere Menge:

95-2(Satz)

a) 1 *Menge.*

b) $0 \neq 1$.

Beweis **95-2** a)

1: Via **SingeltonAxiom** gilt: $\{0\}$ Menge.

2: Via **95-1(Def)** gilt: $1 = \{0\}$.

3: Aus 2"$1 = \{0\}$" und
aus 1"$\{0\}$ Menge"
folgt: 1 Menge.

b)

1: Via **1-5** gilt: $0 \neq \{0\}$.

2: Via **95-1(Def)** gilt: $1 = \{0\}$.

3: Aus 1"$0 \neq \{0\}$" und
aus 2"$1 = \{0\}$"
folgt: $0 \neq 1$.

□

ParameterAxiom I. Die Parameter $\mathbb{A}, \mathbb{R}, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty, \infty$ und i werden in die Essays eingeführt, wobei kein Versuch unternommen wird, diese Parameter mit KlassenTermen zu identifizieren. Die Zeichenkette "nan" soll an "Not a Number" erinnern. Im Folgenden werden $\mathbb{A}, \mathbb{R}, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty, \infty, \mathsf{i}$ ohne expliziten Bezug auf **ParameterAxiom I** als Klassen angesehen:

<u>ParameterAxiom I</u>

a) $\exists \Omega : \Omega = \mathbb{A}$.

b) $\exists \Omega : \Omega = \mathbb{R}$.

c) $\exists \Omega : \Omega = \mathsf{nan}$.

d) $\exists \Omega : \Omega = +\infty$.

e) $\exists \Omega : \Omega = -\infty$.

f) $\exists \Omega : \Omega = \infty$.

g) $\exists \Omega : \Omega = \mathsf{i}$.

AAI: Arithmetisches Axiom I. Es werden den via **ParameterAxiom I** in die Essays eingeführten Klassen *axiomatisch* erste Eigenschaften zugeordnet:

<u>AAI: Arithmetisches Axiom I</u>

a) $0 \in \mathbb{R}$.

b) $1 \in \mathbb{R}$.

c) $\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$.

d) $+\infty \notin \mathbb{R}$.

e) $-\infty \notin \mathbb{R}$.

f) $\infty \notin \mathbb{R}$.

g) $\mathsf{i} \notin \mathbb{R}$.

h) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$.

i) $\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$.

j) $+\infty \in \mathbb{A}$.

k) $-\infty \in \mathbb{A}$.

l) $\infty \notin \mathbb{A}$.

m) $\mathsf{i} \in \mathbb{A}$.

n) ∞ Menge.

o) $\mathbb{A}$ Menge.

p) $\mathsf{nan} \neq +\infty$.

q) $\mathsf{nan} \neq -\infty$.

95-3. Aus **AAI** ergeben sich ohne viel Mühe einige “Mengen-Aussagen”, in denen $\mathbb{A}$ und ∞ als einzige der in **ParameterAxiom I** eingeführten Parameter nicht vorkommen. $\mathbb{A}, \infty$ sind via **AAI** Mengen:

95-3(Satz)

a) $\mathbb{R}$ *Menge.*

b) nan *Menge.*

c) $+\infty$ *Menge.*

d) $-\infty$ *Menge.*

e) i *Menge.*

Beweis **95-3**

1.1: Via **AAI** gilt: $\mathbb{A}$ Menge.

1.2: Via **AAI** gilt: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$.

1.3: Via **AAI** gilt: $\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$.

1.4: Via **AAI** gilt: $+\infty \in \mathbb{A}$.

1.5: Via **AAI** gilt: $-\infty \in \mathbb{A}$.

1.6: Via **AAI** gilt: $\mathsf{i} \in \mathbb{A}$.

2.a): Aus 1.1“$\mathbb{A}$ Menge” und
aus 1.2“$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathbb{R}$ Menge.

2.b): Aus 1.3“$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$”
folgt via **ElementAxiom**: nan Menge.

2.c): Aus 1.4“$+\infty \in \mathbb{A}$”
folgt via **ElementAxiom**: $+\infty$ Menge.

2.d): Aus 1.5“$-\infty \in \mathbb{A}$”
folgt via **ElementAxiom**: $-\infty$ Menge.

2.e): Aus 1.6“$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$”
folgt via **ElementAxiom**: i Menge.

□

95-4. Die in **AAI** eingeführten Klassen $\mathbb{A}, \mathbb{R}, \mathsf{i}$ werden nun mit eigenen Namen versehen. Via **AAI** ist $\mathbb{A}$ eine Menge. Via **95-3** ist $\mathbb{R}$ eine Menge. Die Menge der "komplexen Zahlen" wird später definiert:

95-4(Definition)

1) "$\mathfrak{C}$ **Menge der Zahlen**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathbb{A}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Menge der reellen Zahlen**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathbb{R}.$$

3) "$\mathfrak{C}$ **imaginäre Einheit**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{i}.$$

4) "$\mathfrak{C}$ **Zahl**" genau dann, wenn $\mathfrak{C} \in \mathbb{A}$.

5) "$\mathfrak{C}$ **reelle Zahl**" genau dann, wenn $\mathfrak{C} \in \mathbb{R}$.

95-5. Sowohl 0 als auch $1, \mathsf{i}$ und $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty$ sind Zahlen:

95-5(Satz)

a) 0 *Zahl.*

b) 1 *Zahl.*

c) nan *Zahl.*

d) $+\infty$ *Zahl.*

e) $-\infty$ *Zahl.*

f) i *Zahl.*

Beweis **95-5** `a)`

`1:` Via **AAI** gilt: $0 \in \mathbb{R}$.

`2:` Via **AAI** gilt: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$.

`3:` Aus `1`"$0 \in \mathbb{R}$" und
aus `2`"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $0 \in \mathbb{A}$.

`4:` Aus `3`"$0 \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: 0 Zahl.

`b)`

`1:` Via **AAI** gilt: $1 \in \mathbb{R}$.

`2:` Via **AAI** gilt: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$.

`3:` Aus `1`"$1 \in \mathbb{R}$" und
aus `2`"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $1 \in \mathbb{A}$.

`4:` Aus `3`"$1 \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: 1 Zahl.

`c)`

Aus **AAI**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: nan Zahl.

`d)`

Aus **AAI**"$+\infty \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: $+\infty$ Zahl.

`e)`

Aus **AAI**"$-\infty \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: $-\infty$ Zahl.

`f)`

Aus **AAI**"$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: i Zahl.

□

95-6. Es werden standardmäßige Konsequenzen aus **95-4(Def)** gezogen und es wird fest gestellt, dass jede Zahl eine Menge ist und dass jedes Element aus $\mathbb{R}$ eine Zahl ist. Außerdem wird die erwartete Aussage $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$ etabliert:

95-6(Satz)

a) $\mathbb{A}$ *Menge der Zahlen.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ Menge der Zahlen"*
und "$\mathfrak{D}$ Menge der Zahlen"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) $\mathbb{R}$ *Menge der reellen Zahlen.*

d) *Aus "$\mathfrak{C}$ Menge der reellen Zahlen"*
und "$\mathfrak{D}$ Menge der reellen Zahlen"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

e) i *imaginäre Einheit.*

f) *Aus "$\mathfrak{C}$ imaginäre Einheit" und "$\mathfrak{D}$ imaginäre Einheit"*
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

g) *Aus "x Zahl" folgt "x Menge".*

h) *Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "x Zahl".*

i) *"x Zahl" oder "$x \notin \mathbb{A}$".*

Beweis **95-6** `a)`

Aus "$\mathbb{A} = \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: $\mathbb{A}$ Menge der Zahlen.

`b)` `VS` gleich $(\mathfrak{C}$ Menge der Zahlen$) \wedge (\mathfrak{D}$ Menge der Zahlen$)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ Menge der Zahlen…"
folgt via **95-4(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathbb{A}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…$\mathfrak{D}$ Menge der Zahlen"
folgt via **95-4(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

Beweis **95-6** `c)`

Aus “$\mathbb{R} = \mathbb{R}$”
folgt via **95-4(Def)**: $\mathbb{R}$ Menge der reellen Zahlen.

`d)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Menge der reellen Zahlen) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Menge der reellen Zahlen).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ Menge der reellen Zahlen… ”
folgt via **95-4(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “…$\mathfrak{D}$ Menge der reellen Zahlen”
folgt via **95-4(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`e)`

Aus “$\mathsf{i} = \mathsf{i}$”
folgt via **95-4(Def)**: i imaginäre Einheit.

`f)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ imaginäre Einheit) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ imaginäre Einheit).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ imaginäre Einheit… ”
folgt via **95-4(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{i}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “…$\mathfrak{D}$ imaginäre Einheit”
folgt via **95-4(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{i}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`g)` `VS` gleich x Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich “x Zahl”
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`“$x \in \mathbb{A}$”
folgt via **ElementAxiom**: x Menge.

<u>Beweis **95-6**</u> `h)` `VS` gleich $x \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R}$" und
aus **AAI**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $x \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`i)`

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x \text{ Zahl})$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

□

95-7. Nun werden weitere Aussagen über $\mathbb{R}, \mathbb{A}, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty, \mathsf{i}, \infty$ getroffen. Die Aussagen "$\mathsf{i} \neq \mathsf{nan}$", "$\mathsf{i} \neq +\infty$", "$\mathsf{i} \neq -\infty$", "$+\infty \neq -\infty$" sind im gegenwärtigen Status nicht verfügbar. Beim Beweis wird erstmalig von einer verkürzenden Zitats-Notation Gebrauch gemacht, indem nun etwa "Aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$" folgt via **0-20**: $0 \neq \mathbb{R}$" an Stelle von "• Via **AAI** gilt: $0 \in \mathbb{R}$" und "Aus • folgt via **0-20**: $0 \neq \mathbb{R}$" geschrieben wird:

95-7(Satz)

a) $\mathbb{R} \neq \mathbb{A}$.

b) $0 \neq \mathbb{R}$.

c) $0 \neq \mathbb{A}$.

d) $0 \neq \mathsf{nan}$.

e) $0 \neq +\infty$.

f) $0 \neq -\infty$.

g) $0 \neq \infty$.

h) $0 \neq \mathsf{i}$.

i) $1 \neq \mathsf{nan}$.

j) $1 \neq +\infty$.

k) $1 \neq -\infty$.

l) $1 \neq \infty$.

m) $1 \neq \mathsf{i}$.

n) $\mathsf{nan} \neq \infty$.

o) $+\infty \neq \infty$.

p) $-\infty \neq \infty$.

q) $\mathsf{i} \neq \infty$.

<u>Beweis</u> **95-7** `a)`

`1:` Aus **AAI**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-10**: $\mathbb{A} \neq \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathbb{R} \neq \mathbb{A}$.

`b)`

Aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathbb{R}$.

`c)`

Aus **AAI**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$”
folgt via **0-20**: $0 \neq \mathbb{A}$.

`d)`

Aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $0 \neq \mathsf{nan}$.

`e)`

Aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$” und
aus **AAI**“$+\infty \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $0 \neq +\infty$.

`f)`

Aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$” und
aus **AAI**“$-\infty \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $0 \neq -\infty$.

`g)`

Aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$” und
aus **AAI**“$\infty \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $0 \neq \infty$.

`h)`

Aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{i} \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $0 \neq \mathsf{i}$.

<u>Beweis</u> **95-7** `i)`

Aus **AAI**“$1 \in \mathbb{R}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $1 \neq \mathsf{nan}$.

`j)`

Aus **AAI**“$1 \in \mathbb{R}$” und
aus **AAI**“$+\infty \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $1 \neq +\infty$.

`k)`

Aus **AAI**“$1 \in \mathbb{R}$” und
aus **AAI**“$-\infty \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $1 \neq -\infty$.

`l)`

Aus **AAI**“$1 \in \mathbb{R}$” und
aus **AAI**“$\infty \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $1 \neq \infty$.

`m)`

Aus **AAI**“$1 \in \mathbb{R}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{i} \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-1**: $1 \neq \mathsf{i}$.

`n)`

Aus **AAI**“$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\infty \notin \mathbb{A}$”
folgt via **0-1**: $\mathsf{nan} \neq \infty$.

`o)`

Aus **AAI**“$+\infty \in \mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\infty \notin \mathbb{A}$”
folgt via **0-1**: $+\infty \neq \infty$.

`p)`

Aus **AAI**“$-\infty \in \mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\infty \notin \mathbb{A}$”
folgt via **0-1**: $\infty \neq -\infty$.

<u>Beweis</u> **95-7** `q)`

Aus **AAI**“$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\infty \notin \mathbb{A}$”
folgt via **0-1**: $\mathsf{i} \neq \infty$.

$\square$

95-8. Mit $\mathbb{S}$ und $\mathbb{T}$ werden nun weitere "Zahl-Bereiche" in die Essays eingeführt:

95-8(Definition)

1) $\mathbb{S} = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$.

2) $\mathbb{T} = \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$.

95-9. $\mathbb{S}$ und $\mathbb{T}$ sind Mengen.

95-9(Satz)

a) $\mathbb{S}$ *Menge.*

b) $\mathbb{T}$ *Menge.*

Beweis **95-9** a)

1: Aus **95-3** "$\mathbb{R}$ Menge"
folgt via **94-3**: $\{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$ Menge.

2: Aus **95-8(Def)** "$\mathbb{S} = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$" und
aus 1 "$\{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$ Menge"
folgt: $\mathbb{S}$ Menge.

b)

1: Via des bereits bewiesenen a) gilt: $\mathbb{S}$ Menge.

2: Aus 2 "$\mathbb{S}$ Menge"
folgt via **2-28**: $\{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$ Menge.

3: Aus **95-8(Def)** "$\mathbb{T} = \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$" und
aus 2 "$\{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$ Menge"
folgt: $\mathbb{T}$ Menge.

□

95-10. Um später abzukürzen wird hier Folgendes festgehalten:

95-10(Satz)

a) $\mathsf{nan} \notin \{+\infty, -\infty\}$.

b) $+\infty \in \{+\infty, -\infty\}$.

c) $-\infty \in \{+\infty, -\infty\}$.

d) $\infty \notin \{+\infty, -\infty\}$.

e) $\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\}$.

f) $\infty \notin \{\mathsf{nan}\}$.

<u>Beweis</u> **95-10** `a)`

Aus **AAI**"$\mathsf{nan} \neq +\infty$" und
aus **AAI**"$\mathsf{nan} \neq -\infty$"
folgt via **94-5**: $\mathsf{nan} \notin \{+\infty, -\infty\}$.

`b)`

Aus **95-3**"$+\infty$ Menge"
folgt via **4-9**: $+\infty \in \{+\infty, -\infty\}$.

`c)`

Aus **95-3**"$-\infty$ Menge"
folgt via **4-9**: $-\infty \in \{+\infty, -\infty\}$.

`d)`

`1.1:` Aus **95-7**"$+\infty \neq \infty$" folgt: $\infty \neq +\infty$.

`1.2:` Aus **95-7**"$-\infty \neq \infty$" folgt: $\infty \neq -\infty$.

`2:` Aus `1.1`"$\infty \neq +\infty$" und
aus `1.2`"$\infty \neq -\infty$"
folgt via **94-5**: $\infty \notin \{+\infty, -\infty\}$.

`e)`

Aus **95-3**"nan Menge"
folgt via **1-3**: $\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\}$.

`f)`

`1:` Aus **95-7**"$\mathsf{nan} \neq \infty$" folgt: $\infty \neq \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1`"$\infty \neq \mathsf{nan}$"
folgt via **1-7**: $\infty \notin \{\mathsf{nan}\}$.

□

95-11. Es werden einige Eigenschaften von $\mathbb{S}$ präsentiert. Die Aussage "$\mathsf{i} \notin \mathbb{S}$" ist im gegenwärtigen Status nicht verfügbar:

95-11(Satz)

a) $0 \in \mathbb{S}$.

b) $1 \in \mathbb{S}$.

c) $\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$.

d) $+\infty \in \mathbb{S}$.

e) $-\infty \in \mathbb{S}$.

f) $\infty \notin \mathbb{S}$.

g) $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$.

h) $\mathbb{R} \neq \mathbb{S}$

i) $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$.

j) $\mathbb{S} \neq \mathbb{A}$.

Beweis **95-11** a)

1: Aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt via **2-2**: $0 \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$.

2: Aus 1"$0 \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$" und
aus **95-8(Def)**"$\mathbb{S} = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$"
folgt: $0 \in \mathbb{S}$.

b)

1: Aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **2-2**: $1 \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$.

2: Aus 1"$1 \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$" und
aus **95-8(Def)**"$\mathbb{S} = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$"
folgt: $1 \in \mathbb{S}$.

<u>Beweis **95-11**</u> `c)`

`1:` Aus **95-10**“$\mathsf{nan}\notin\{+\infty,-\infty\}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{nan}\notin\mathbb{R}$”
folgt via **2-3**: $\mathsf{nan}\notin\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{nan}\notin\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$” und
aus **95-8(Def)**“$\mathbb{S}=\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$”
folgt: $\mathsf{nan}\notin\mathbb{S}$.

`d)`

`1:` Aus **95-10**“$+\infty\in\{+\infty,-\infty\}$”
folgt via **2-2**: $+\infty\in\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`“$+\infty\in\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$” und
aus **95-8(Def)**“$\mathbb{S}=\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$”
folgt: $+\infty\in\mathbb{S}$.

`e)`

`1:` Aus **95-10**“$-\infty\in\{+\infty,-\infty\}$”
folgt via **2-2**: $+\infty\in\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`“$-\infty\in\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$” und
aus **95-8(Def)**“$\mathbb{S}=\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$”
folgt: $-\infty\in\mathbb{S}$.

`f)`

`1:` Aus **95-10**“$\infty\notin\{+\infty,-\infty\}$” und
aus **AAI**“$\infty\notin\mathbb{R}$”
folgt via **2-3**: $\infty\notin\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`“$\infty\notin\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$” und
aus **95-8(Def)**“$\mathbb{S}=\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$”
folgt: $\infty\notin\mathbb{S}$.

`g)`

`1:` Via **2-7** gilt: $\mathbb{R}\subseteq\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`“$\mathbb{R}\subseteq\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$” und
aus **95-8(Def)**“$\mathbb{S}=\{+\infty,-\infty\}\cup\mathbb{R}$”
folgt: $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{S}$.

Beweis **95-11** `h)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $+\infty \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1`“$+\infty \in \mathbb{S}$” und
aus **AAI**“$+\infty \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-10**: $\mathbb{S} \neq \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathbb{R} \neq \mathbb{S}$.

Beweis **95-11** `i)`

`Thema1` $\alpha \in \mathbb{S}$.

`2:` Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathbb{S}$" und
aus **95-8(Def)** "$\mathbb{S} = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$"
folgt: $\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$.

`3:` Aus 2 "$\alpha \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$"
folgt via **94-8**: $(\alpha = +\infty) \vee (\alpha = -\infty) \vee (\alpha \in \mathbb{R})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha = +\infty$.

Aus `3.1.Fall` "$\alpha = +\infty$" und
aus **AAI** "$+\infty \in \mathbb{A}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`3.2.Fall` $\alpha = -\infty$.

Aus `3.2.Fall` "$\alpha = -\infty$" und
aus **AAI** "$-\infty \in \mathbb{A}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`3.3.Fall` $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aus `3.3.Fall` "$\alpha \in \mathbb{R}$" und
aus **AAI** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{S}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$.

Beweis **95-11** j)

1: Via des bereits bewiesenen c) gilt: $\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$.

2: Aus **AAI** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$" und
aus 1 "$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"
folgt via **0-10**: $\mathbb{A} \neq \mathbb{S}$.

3: Aus 2
folgt: $\mathbb{S} \neq \mathbb{A}$.

□

95-12. Es werden einige Eigenschaften von $\mathbb{T}$ angegeben. Die Aussagen "`i` $\notin \mathbb{T}$" und "$\mathbb{T} \neq \mathbb{A}$" sind im gegenwärtigen Status nicht verfügbar. Die Beweis-Reihenfolge ist `i) - a) - b) - c) - d) - e) - f) - g) - h) - j) - k)`:

95-12(Satz)

`a)` $0 \in \mathbb{T}$.

`b)` $1 \in \mathbb{T}$.

`c)` $\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`d)` $+\infty \in \mathbb{T}$.

`e)` $-\infty \in \mathbb{T}$.

`f)` $\infty \notin \mathbb{T}$.

`g)` $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$.

`h)` $\mathbb{R} \neq \mathbb{T}$.

`i)` $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$.

`j)` $\mathbb{S} \neq \mathbb{T}$.

`k)` $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$.

Beweis **95-12** `abcdei)`

`1.1:` Via **2-7** gilt: $\mathbb{S} \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus **95-10** "$\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\}$"
folgt via **2-2**: $\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$.

`2.i):` Aus `1.1` "$\mathbb{S} \subseteq \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$" und
aus **95-8(Def)** "$\mathbb{T} = \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$"
folgt: $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$.

`3.a):` Aus **95-11** "$0 \in \mathbb{S}$" und
aus `2.i)` "$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $0 \in \mathbb{T}$.

`3.b):` Aus **95-11** "$1 \in \mathbb{S}$" und
aus `2.i)` "$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $1 \in \mathbb{T}$.

`3.c):` Aus `1.2` "$\mathsf{nan} \in \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$" und
aus **95-8(Def)** "$\mathbb{T} = \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$"
folgt: $\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`3.d):` Aus **95-11** "$+\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `2.i)` "$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $+\infty \in \mathbb{T}$.

`3.e):` Aus **95-11** "$-\infty \in \mathbb{S}$" und
aus `2.i)` "$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $-\infty \in \mathbb{T}$.

`f)`

`1:` Aus **95-10** "$\infty \notin \{\mathsf{nan}\}$" und
aus **95-11** "$\infty \notin \mathbb{S}$"
folgt via **2-3**: $\infty \notin \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` "$\infty \notin \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$" und
aus **95-8(Def)** "$\mathbb{T} = \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$"
folgt: $\infty \notin \mathbb{T}$.

`g)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `i)` gilt: $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$.

`2:` Aus **95-11** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$" und
aus `1` "$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-6**: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$.

<u>Beweis **95-12**</u> `h)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$” und
aus **AAI**“$\mathsf{nan} \notin \mathbb{R}$”
folgt via **0-10**: $\mathbb{T} \neq \mathbb{R}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathbb{R} \neq \mathbb{T}$.

`j)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`“$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$” und
aus **95-11**“$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$”
folgt via **0-10**: $\mathbb{T} \neq \mathbb{S}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $\mathbb{S} \neq \mathbb{T}$.

Beweis **95-12** `k)`

`Thema1` $\alpha \in \mathbb{T}$.

2: Aus `Thema1` "$\alpha \in \mathbb{T}$" und
aus **95-8(Def)** "$\mathbb{T} = \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$"
folgt: $\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$.

3: Aus 2 "$\alpha \in \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$"
folgt via **94-8**: $(\alpha = \mathsf{nan}) \vee (\alpha \in \mathbb{S})$.

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $\alpha = \mathsf{nan}$.

Aus `3.1.Fall` "$\alpha = \mathsf{nan}$" und
aus **AAI** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{A}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`3.2.Fall` $\alpha \in \mathbb{S}$.

Aus `3.2.Fall` "$\alpha \in \mathbb{S}$" und
aus **95-11** "$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $\alpha \in \mathbb{A}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{T}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$.

□

95-13. $\mathbb{S}, \mathbb{T}$ werden nun mit eigenen Namen versehen. Via **95-9** sind $\mathbb{S}, \mathbb{T}$ in der Tat Mengen:

95-13(Definition)

1) "$\mathfrak{C}$ **Menge der sreellen Zahlen**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathbb{S}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Menge der treellen Zahlen**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathbb{T}.$$

95-14. Diese vier Resultate über $\mathbb{S}, \mathbb{T}$ sind nicht unerwartet:

95-14(Satz)

a) $\mathbb{S}$ *Menge der sreellen Zahlen.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ Menge der sreellen Zahlen"*
und "$\mathfrak{D}$ Menge der sreellen Zahlen"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) $\mathbb{T}$ *Menge der treellen Zahlen.*

d) *Aus "$\mathfrak{C}$ Menge der treellen Zahlen"*
und "$\mathfrak{D}$ Menge der treellen Zahlen"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

<u>Beweis **95-14**</u> `a)`

Aus “$\mathbb{S} = \mathbb{S}$”
folgt via **95-13(Def)**: $\mathbb{S}$ Menge der sreellen Zahlen.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Menge der sreellen Zahlen)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ Menge der sreellen Zahlen).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ Menge der sreellen Zahlen. . . ”
folgt via **95-13(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathbb{S}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “. . . $\mathfrak{D}$ Menge der sreellen Zahlen”
folgt via **95-13(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)`

Aus “$\mathbb{T} = \mathbb{T}$”
folgt via **95-13(Def)**: $\mathbb{T}$ Menge der treellen Zahlen.

`d)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Menge der treellen Zahlen)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ Menge der treellen Zahlen).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ Menge der treellen Zahlen. . . ”
folgt via **95-13(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “. . . $\mathfrak{D}$ Menge der treellen Zahlen”
folgt via **95-13(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

$\square$

95-15. Diese Aussagen helfen später schneller beweisen:

<u>**95-15(Satz)**</u>

a) *Aus* "$p \in \mathbb{R}$" *folgt* "$p \in \mathbb{S}$".

b) *Aus* "$p = +\infty$" *folgt* "$p \in \mathbb{S}$".

c) *Aus* "$p = -\infty$" *folgt* "$p \in \mathbb{S}$".

d) *Aus* "$p \in \mathbb{S}$" *folgt* "$p \in \mathbb{R}$" *oder* "$p = +\infty$" *oder* "$p = -\infty$".

<u>Beweis **95-15**</u> `a)` `VS` gleich $p \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{R}$" und
aus **95-11** "$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{S}$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{S}$.

`b)` `VS` gleich $p = +\infty$.

Aus `VS` gleich "$p = +\infty$" und
aus **95-11** "$+\infty \in \mathbb{S}$"
folgt: $p \in \mathbb{S}$.

`c)` `VS` gleich $p = -\infty$.

Aus `VS` gleich "$p = -\infty$" und
aus **95-11** "$-\infty \in \mathbb{S}$"
folgt: $p \in \mathbb{S}$.

`d)` `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{S}$" und
aus **95-8(Def)** "$\mathbb{S} = \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$"
folgt: $p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1` "$p \in \{+\infty, -\infty\} \cup \mathbb{R}$"
folgt via **94-8**: $(p = +\infty) \vee (p = -\infty) \vee (p \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty)$.

$\square$

95-16. Auch diese Aussagen helfen später schneller beweisen:

95-16(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathbb{R}$" *folgt* "$p \in \mathbb{T}$".

b) *Aus* "$p \in \mathbb{S}$" *folgt* "$p \in \mathbb{T}$".

c) *Aus* "$p = \mathsf{nan}$" *folgt* "$p \in \mathbb{T}$".

d) *Aus* "$p = +\infty$" *folgt* "$p \in \mathbb{T}$".

e) *Aus* "$p = -\infty$" *folgt* "$p \in \mathbb{T}$".

f) *Aus* "$p \in \mathbb{T}$" *folgt* "$p \in \mathbb{S}$" *oder* "$p = \mathsf{nan}$".

g) *Aus* "$p \in \mathbb{T}$"
folgt "$p \in \mathbb{R}$" *oder* "$p = \mathsf{nan}$" *oder* "$p = +\infty$" *oder* "$p = -\infty$".

Beweis **95-16** a) VS gleich $p \in \mathbb{R}$.

Aus VS gleich "$p \in \mathbb{R}$" und
aus **95-12**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{T}$.

b) VS gleich $p \in \mathbb{S}$.

Aus VS gleich "$p \in \mathbb{S}$" und
aus **95-12**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{T}$.

c) VS gleich $p = \mathsf{nan}$.

Aus VS gleich "$p = \mathsf{nan}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt: $p \in \mathbb{T}$.

d) VS gleich $p = +\infty$.

Aus VS gleich "$p = +\infty$" und
aus **95-12**"$+\infty \in \mathbb{T}$"
folgt: $p \in \mathbb{T}$.

e) VS gleich $p = -\infty$.

Aus VS gleich "$p = -\infty$" und
aus **95-12**"$-\infty \in \mathbb{T}$"
folgt: $p \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis **95-16**</u> `f)` `VS` gleich $p \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{T}$” und
aus **95-8(Def)** “$\mathbb{T} = \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$”
folgt: $p \in \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$.

`2:` Aus `1` “$p \in \{\mathsf{nan}\} \cup \mathbb{S}$”
folgt via **94-8**: $(p = \mathsf{nan}) \vee (p \in \mathbb{S})$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(p \in \mathbb{S}) \vee (p = \mathsf{nan})$.

`g)` `VS` gleich $p \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{T}$”
folgt via des bereits bewiesenen `f)`: $(p \in \mathbb{S}) \vee (p = \mathsf{nan})$.

`2:` Via **95-15** gilt: $(p \in \mathbb{S}) \Rightarrow ((p \in \mathbb{R}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty))$.

`3:` Aus `1` und
aus `2`
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \vee (p = \mathsf{nan}) \vee (p = +\infty) \vee (p = +\infty)$.

$\square$

95-17. Mit diesem Kriterium können Aussagen über treelle Zahlen auf sreelle und reelle Zahlen übertragen werden:

95-17(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathbb{R}$.

`ii)` "$p \in \mathbb{S}$" *und* "$p \neq +\infty$" *und* "$p \neq -\infty$".

`iii)` "$p \in \mathbb{T}$" *und* "$p \neq \mathsf{nan}$" *und* "$p \neq +\infty$" *und* "$p \neq -\infty$".

Beweis **95-17** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{R}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-15**: $p \in \mathbb{S}$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{R}$" und
aus **AAI**"$+\infty \notin \mathbb{R}$"
folgt via **0-1**: $p \neq +\infty$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{R}$" und
aus **AAI**"$-\infty \notin \mathbb{R}$"
folgt via **0-1**: $p \neq -\infty$.

`3:` Aus `1`"$p \in \mathbb{S}$",
aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $(p \in \mathbb{S}) \wedge (p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty)$.

<u>Beweis **95-17**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $(p \in \mathbb{S}) \wedge (p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty)$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-16**: $p \in \mathbb{T}$.

2: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus **95-11**"$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$"
folgt via **0-1**: $p \neq \mathsf{nan}$.

3: Aus 1"$p \in \mathbb{T}$",
aus 2"$p \neq \mathsf{nan}$" und
aus VS gleich "$\ldots (p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty)$"
folgt: $(p \in \mathbb{T}) \wedge (p \neq \mathsf{nan}) \wedge (p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $(p \in \mathbb{T}) \wedge (p \neq \mathsf{nan}) \wedge (p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty)$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(p \in \mathbb{R}) \vee (p = \mathsf{nan}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty)$.

2: Aus 1"$(p \in \mathbb{R}) \vee (p = \mathsf{nan}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty)$" und
aus VS gleich "$\ldots p \neq \mathsf{nan} \ldots$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty)$.

3: Aus 2"$(p \in \mathbb{R}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty)$" und
aus VS gleich "$\ldots p \neq +\infty \ldots$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \vee (p = -\infty)$.

4: Aus 3"$(p \in \mathbb{R}) \vee (p = -\infty)$" und
aus VS gleich "$\ldots p \neq -\infty$"
folgt: $p \in \mathbb{R}$.

$\square$

95-18. Dieses Kriterium ergibt sich via Negation aus **95-17**:

95-18(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \notin \mathbb{R}$.

`ii)` "$p \notin \mathbb{S}$" *oder* "$p = +\infty$" *oder* "$p = -\infty$".

`iii)` "$p \notin \mathbb{T}$" *oder* "$p = \mathsf{nan}$" *oder* "$p = +\infty$" *oder* "$p = -\infty$".

Beweis **95-18**

`1:` Via **95-17** gilt:

$$p \in \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow ((p \in \mathbb{S}) \wedge (p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty))$$
$$\Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \neq \mathsf{nan}) \wedge (p \neq +\infty) \wedge (p \neq -\infty)).$$

`2:` Aus `1`
folgt:

$$p \notin \mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow ((p \notin \mathbb{S}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty))$$
$$\Leftrightarrow ((p \notin \mathbb{T}) \vee (p = \mathsf{nan}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty)).$$

□

95-19. Aus $p \in \mathbb{S}$ und $p \neq -\infty$ folgt $p \in \mathbb{R}$ oder $p \in +\infty$.
Eine analoge Aussage gilt für vertauschte Rollen von $+\infty$ und $-\infty$:

95-19(Satz)

a) *Aus* "$(p \in \mathbb{S}) \wedge (p \neq -\infty)$" *folgt* "$(p \in \mathbb{R}) \vee (p = +\infty)$".

b) *Aus* "$(p \in \mathbb{S}) \wedge (p \neq +\infty)$" *folgt* "$(p \in \mathbb{R}) \vee (p = -\infty)$".

Beweis **95-19** a) VS gleich $(p \in \mathbb{S}) \wedge (p \neq -\infty)$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(p \in \mathbb{R}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty)$.

2: Aus 1 "$(p \in \mathbb{R}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty)$" und
aus VS gleich "$\ldots p \neq -\infty$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \vee (p = +\infty)$.

b) VS gleich $(p \in \mathbb{S}) \wedge (p \neq +\infty)$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(p \in \mathbb{R}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty)$.

2: Aus 1 "$(p \in \mathbb{R}) \vee (p = +\infty) \vee (p = -\infty)$" und
aus VS gleich "$\ldots p \neq +\infty$"
folgt: $(p \in \mathbb{R}) \vee (p = -\infty)$.

□

95-20. Mit diesem Kriterium können Aussagen über treelle Zahlen auf sreelle Zahlen übertragen werden:

95-20(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \in \mathbb{S}$.

`ii)` *“$p \in \mathbb{T}$” und “$p \neq \mathsf{nan}$”.*

Beweis **95-20** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{S}$”
folgt via **95-16**: $p \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{S}$” und
aus **95-11**“$\mathsf{nan} \notin \mathbb{S}$”
folgt via **0-1**: $p \neq \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1`“$p \in \mathbb{T}$” und
aus `2`“$p \neq \mathsf{nan}$”
folgt: $(p \in \mathbb{T}) \wedge (p \neq \mathsf{nan})$.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}$ `VS` gleich $(p \in \mathbb{T}) \wedge (p \neq \mathsf{nan})$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **95-16**: $(p \in \mathbb{S}) \vee (p = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1`“$(p \in \mathbb{S}) \vee (p = \mathsf{nan})$” und
aus `VS` gleich “$\ldots p \neq \mathsf{nan}$”
folgt: $p \in \mathbb{S}$.

□

95-21. Dieses Kriterium folgt via Negation aus **95-20**:

95-21(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $p \notin \mathbb{S}$.

`ii)` *"*$p \notin \mathbb{T}$*" oder "*$p = \mathsf{nan}$*".*

Beweis **95-21**

`1:` Via **95-20** gilt:
$$p \in \mathbb{S} \Leftrightarrow ((p \in \mathbb{T}) \wedge (p \neq \mathsf{nan})).$$

`2:` Aus `1` folgt:
$$p \notin \mathbb{S} \Leftrightarrow ((p \notin \mathbb{T}) \vee (p = \mathsf{nan})).$$

□

ParameterAxiom II.
RealTeilFunktion. Re.
ImaginärTeilFunktion. Im.
Addition. A.
Multiplikation. M.
MinusFunktion. mns.
ReziproksFunktion. rez.
AAII: Arithmetisches Axiom II.
REIM-**Notation.**
AAIII: Arithmetisches Axiom III.
$\mathbb{C}$**.**
$\mathbb{B}$**.**
RECH-**Notation.**
ab2**.**
AAIV: Arithmetisches Axiom IV.
AAV: Arithmetisches Axiom V.

Ersterstellung: 02/02/06 **Letzte Änderung: 24/02/12**

ParameterAxiom II. Die Parameter $\mathsf{Re}, \mathsf{Im}, \mathsf{A}, \mathsf{M}, \mathsf{mns}, \mathsf{rez}$ werden in die Essays eingeführt, wobei kein Versuch unternommen wird, diese Parameter mit Klassen-Termen zu identifizieren. Die Namensgebung erfolgt später. Im Folgenden werden $\mathsf{Re}, \mathsf{Im}, \mathsf{A}, \mathsf{M}, \mathsf{mns}, \mathsf{rez}$ ohne expliziten Bezug auf **ParameterAxiom II** als Klassen angesehen:

ParameterAxiom II

a) $\exists \Omega : \Omega = \mathsf{Re}$.

b) $\exists \Omega : \Omega = \mathsf{Im}$.

c) $\exists \Omega : \Omega = \mathsf{A}$.

d) $\exists \Omega : \Omega = \mathsf{M}$.

e) $\exists \Omega : \Omega = \mathsf{mns}$.

f) $\exists \Omega : \Omega = \mathsf{rez}$.

AAII: Arithmetisches Axiom II. Es werden den via **ParameterAxiom II** in die Essays eingeführten Klassen erste Eigenschaften *axiomatisch* zugeordnet:

AAII: Arithmetisches Axiom II.

a) $\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$.

b) $\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$.

c) A Algebra in $\mathbb{A}$.

d) M Algebra in $\mathbb{A}$.

e) $\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

f) $\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

96-1. Nun werden die ersten Schlussfolgerungen aus **AAII** gezogen:

96-1(Satz)

a) "Re *Funktion*" *und* "$\mathsf{dom}\,\mathsf{Re} = \mathbb{A}$" *und* "$\mathsf{ran}\,\mathsf{Re} \subseteq \mathbb{T}$".

b) "Im *Funktion*" *und* "$\mathsf{dom}\,\mathsf{Im} = \mathbb{A}$" *und* "$\mathsf{ran}\,\mathsf{Im} \subseteq \mathbb{T}$".

c) "A *Funktion*" *und* "$\mathsf{dom}\,\mathsf{A} = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$" *und* "$\mathsf{ran}\,\mathsf{A} \subseteq \mathbb{A}$".

d) "M *Funktion*" *und* "$\mathsf{dom}\,\mathsf{M} = \mathbb{A} \times \mathbb{A}$" *und* "$\mathsf{ran}\,\mathsf{M} \subseteq \mathbb{A}$".

e) "mns *Funktion*" *und* "$\mathsf{dom}\,\mathsf{mns} = \mathbb{A}$" *und* "$\mathsf{ran}\,\mathsf{mns} \subseteq \mathbb{A}$".

f) "rez *Funktion*" *und* "$\mathsf{dom}\,\mathsf{rez} = \mathbb{A}$" *und* "$\mathsf{ran}\,\mathsf{rez} \subseteq \mathbb{A}$".

<u>Beweis</u> **96-1** `a)`

Aus **AAII**“$\mathsf{Re}:\mathbb{A}\to\mathbb{T}$”
folgt via **21-1(Def)**:

$$(\mathsf{Re}\text{ Funktion})\wedge(\mathsf{dom}\,\mathsf{Re}=\mathbb{A})\wedge(\mathsf{ran}\,\mathsf{Re}\subseteq\mathbb{T}).$$

`b)`

Aus **AAII**“$\mathsf{Im}:\mathbb{A}\to\mathbb{T}$”
folgt via **21-1(Def)**:

$$(\mathsf{Im}\text{ Funktion})\wedge(\mathsf{dom}\,\mathsf{Im}=\mathbb{A})\wedge(\mathsf{ran}\,\mathsf{Im}\subseteq\mathbb{T}).$$

`c)`

Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$”
folgt via **93-6**:

$$(\mathsf{A}\text{ Funktion})\wedge(\mathsf{dom}\,\mathsf{A}=\mathbb{A}\times\mathbb{A})\wedge(\mathsf{ran}\,\mathsf{A}\subseteq\mathbb{A}).$$

`d)`

Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$”
folgt via **93-6**:

$$(\mathsf{M}\text{ Funktion})\wedge(\mathsf{dom}\,\mathsf{M}=\mathbb{A}\times\mathbb{A})\wedge(\mathsf{ran}\,\mathsf{M}\subseteq\mathbb{A}).$$

`e)`

Aus **AAII**“$\mathsf{mns}:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$”
folgt via **21-1(Def)**:

$$(\mathsf{mns}\text{ Funktion})\wedge(\mathsf{dom}\,\mathsf{mns}=\mathbb{A})\wedge(\mathsf{ran}\,\mathsf{mns}\subseteq\mathbb{A}).$$

`f)`

Aus **AAII**“$\mathsf{rez}:\mathbb{A}\to\mathbb{A}$”
folgt via **21-1(Def)**:

$$(\mathsf{rez}\text{ Funktion})\wedge(\mathsf{dom}\,\mathsf{rez}=\mathbb{A})\wedge(\mathsf{ran}\,\mathsf{rez}\subseteq\mathbb{A}).$$

$\square$

96-2. Die in **AAII** eingeführten Klassen $\mathsf{Re}, \mathsf{Im}, \mathsf{A}, \mathsf{M}, \mathsf{mns}, \mathsf{rez}$ werden mit eigenen Namen versehen. Via **96-1** sind $\mathsf{Re}, \mathsf{Im}, \mathsf{A}, \mathsf{M}, \mathsf{mns}, \mathsf{rez}$ in der Tat Funktionen:

96-2(Definition)

1) "$\mathfrak{C}$ **RealTeilFunktion**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{Re}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **ImaginärTeilFunktion**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{Im}.$$

3) "$\mathfrak{C}$ **Addition**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{A}.$$

4) "$\mathfrak{C}$ **Multiplikation**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{M}.$$

5) "$\mathfrak{C}$ **MinusFunktion**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{mns}.$$

6) "$\mathfrak{C}$ **ReziproksFunktion**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathsf{rez}.$$

96-3. Aus **96-2(Def)** folgt Erwartetes:

96-3(Satz)

a) Re *RealTeilFunktion.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ RealTeilFunktion" und "$\mathfrak{D}$ RealTeilFunktion" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

c) Im *ImaginärTeilFunktion.*

d) *Aus "$\mathfrak{C}$ ImaginärTeilFunktion" und "$\mathfrak{D}$ ImaginärTeilFunktion" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

e) A *Addition.*

f) *Aus "$\mathfrak{C}$ Addition" und "$\mathfrak{D}$ Addition" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

g) M *Multiplikation.*

h) *Aus "$\mathfrak{C}$ Multiplikation" und "$\mathfrak{D}$ Multiplikation" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

i) mns *MinusFunktion.*

j) *Aus "$\mathfrak{C}$ MinusFunktion" und "$\mathfrak{D}$ MinusFunktion" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

k) rez *ReziproksFunktion.*

l) *Aus "$\mathfrak{C}$ ReziproksFunktion" und "$\mathfrak{D}$ ReziproksFunktion" folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".*

Beweis **96-3** a)

Aus "Re = Re" folgt via **96-2(Def)**: Re RealTeilFunktion.

b) VS gleich ($\mathfrak{C}$ RealTeilFunktion) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ RealTeilFunktion).

1.1: Aus VS gleich "$\mathfrak{C}$ RealTeilFunktion..."
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{Re}$.

1.2: Aus VS gleich "...$\mathfrak{D}$ RealTeilFunktion"
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{Re}$.

2: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

<u>Beweis</u> **96-3** `c)`

Aus "$\mathsf{Im} = \mathsf{Im}$" folgt via **96-2(Def)**: Im ImaginärTeilFunktion.

`d)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ ImaginärTeilFunktion) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ ImaginärTeilFunktion).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ ImaginärTeilFunktion..."
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{Im}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "...$\mathfrak{D}$ ImaginärTeilFunktion"
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{Im}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`e)`

Aus "$\mathsf{A} = \mathsf{A}$" folgt via **96-2(Def)**: A Addition.

`f)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Addition) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Addition).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ Addition..."
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{A}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "...$\mathfrak{D}$ Addition"
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{A}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`g)`

Aus "$\mathsf{M} = \mathsf{M}$" folgt via **96-2(Def)**: M Multiplikation.

`h)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Multiplikation) $\wedge$ ($\mathfrak{D}$ Multiplikation).

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ Multiplikation..."
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{M}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "...$\mathfrak{D}$ Multiplikation"
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{M}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

Beweis **96-3** `i)`

Aus "$\mathsf{mns} = \mathsf{mns}$" folgt via **96-2(Def)**: mns MinusFunktion.

`j)` `VS` gleich $(\mathfrak{C}$ MinusFunktion$) \wedge (\mathfrak{D}$ MinusFunktion$)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ MinusFunktion..."
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{mns}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "...$\mathfrak{D}$ MinusFunktion"
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{mns}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`k)`

Aus "$\mathsf{rez} = \mathsf{rez}$" folgt via **96-2(Def)**: rez ReziproksFunktion.

`l)` `VS` gleich $(\mathfrak{C}$ ReziproksFunktion$) \wedge (\mathfrak{D}$ ReziproksFunktion$)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\mathfrak{C}$ ReziproksFunktion..."
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathsf{rez}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "...$\mathfrak{D}$ ReziproksFunktion"
folgt via **96-2(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathsf{rez}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

$\square$

96-4. Re, Im, A, M, mns, rez sind Mengen.

96-4(Satz)

a) Re *Menge.*

b) Im *Menge.*

c) A *Menge.*

d) M *Menge.*

e) mns *Menge.*

f) rez *Menge.*

<u>Beweis</u> **96-4** `a)`

Aus **AAII**“$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$” und
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge”
folgt via **26-5**: Re Menge.

`b)`

Aus **AAII**“$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$” und
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge”
folgt via **26-5**: Im Menge.

`c)`

Aus **AAII**“A Algebra in $\mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge”
folgt via **93-9**: A Menge.

`d)`

Aus **AAII**“M Algebra in $\mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge”
folgt via **93-9**: M Menge.

`e)`

Aus **AAII**“$\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge”
folgt via **26-5**: mns Menge.

`f)`

Aus **AAII**“$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge”
folgt via **26-5**: rez Menge.

$\square$

`REIM`-**Notation.** Zwecks Vereinfachung werden gelegentlich die Klammern bei den Werten von Re und Im in x weggelassen:

`REIM`-Notation

1) $\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}(x)$.

2) $\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}(x)$.

AAIII: Arithmetisches Axiom III. Sowohl Real- als auch ImaginärTeil von 0 sind 0. Der RealTeil von i ist 0, der ImaginärTeil von i ist 1:

AAIII: Arithmetisches Axiom III.

a) "$\mathsf{Re}0 = 0$" und "$\mathsf{Im}0 = 0$".

b) "$\mathsf{Rei} = 0$" und "$\mathsf{Imi} = 1$".

`REIM`-**Notation**.

96-5. Die Klassen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{B}$ werden via KlassenKlammern, die von keiner weiteren Variablen abhängen, in die Essays eingeführt. $\mathbb{C}$ ist genau die Klasse all jener Elemente aus $\mathbb{A}$, deren Real- und ImaginärTeil in $\mathbb{R}$ sind. $\mathbb{B}$ ist genau die Klasse all jener Elemente aus $\mathbb{A}$, deren Real- und ImaginärTeil in $\mathbb{S}$ sind:

96-5(Definition)

1) $\mathbb{C}$

$$= 96.0() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})\}.$$

2) $\mathbb{B}$

$$= 96.1() = \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})\}.$$

`REIM`-**Notation**.

96-6. $\mathbb{B}, \mathbb{C}$ sind als TeilKlassen von $\mathbb{A}$ Mengen:

96-6(Satz)

a) $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$.

b) $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$.

c) $\mathbb{C}$ *Menge.*

d) $\mathbb{B}$ *Menge.*

Beweis **96-6** a)

Thema1 $\alpha \in \mathbb{C}$.

2: Aus Thema1 "$\alpha \in \mathbb{C}$" und
aus "$\mathbb{C} = \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})\}$" folgt:
$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})\}$.

3: Aus 2 "$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{R}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{R})\}$"
folgt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

Ergo Thema1: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{C}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$.

Beweis **96-6** `b)`

`Thema1` $\alpha \in \mathbb{B}$.

`2:` Aus `Thema1`“$\alpha \in \mathbb{B}$” und
aus “$\mathbb{B} = \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})\}$”
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})\}$.

`3:` Aus `2`“$\alpha \in \{\omega : (\omega \in \mathbb{A}) \wedge (\mathsf{Re}\omega \in \mathbb{S}) \wedge (\mathsf{Im}\omega \in \mathbb{S})\}$”
folgt: $\alpha \in \mathbb{A}$.

Ergo `Thema1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{B}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`“$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathbb{C}$ Menge.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`“$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$” und
aus **AAI**“$\mathbb{A}$ Menge”
folgt via **TeilMengenAxiom**: $\mathbb{B}$ Menge.

$\square$

96-7. Die in **96-5(Def)** eingeführten Klassen $\mathbb{C}, \mathbb{B}$ werden mit eigenen Namen versehen. Via **96-6** sind $\mathbb{C}, \mathbb{B}$ in der Tat Mengen:

96-7(Definition)

1) "$\mathfrak{C}$ **Menge der komplexen Zahlen**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathbb{C}.$$

2) "$\mathfrak{C}$ **Menge der bkomplexen Zahlen**" genau dann, wenn gilt:

$$\mathfrak{C} = \mathbb{B}.$$

96-8. Nun werden erste Konsequenzen aus **96-7(Def)** gezogen:

96-8(Satz)

a) $\mathbb{C}$ *Menge der komplexen Zahlen.*

b) *Aus "$\mathfrak{C}$ Menge der komplexen Zahlen"*
und "$\mathfrak{D}$ Menge der komplexen Zahlen"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

c) $\mathbb{B}$ *Menge der bkomplexen Zahlen.*

d) *Aus "$\mathfrak{C}$ Menge der bkomplexen Zahlen"*
und "$\mathfrak{D}$ Menge der bkomplexen Zahlen"
folgt "$\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$".

<u>Beweis **96-8**</u> `a)`

Aus “$\mathbb{C} = \mathbb{C}$”
folgt via **96-7(Def)**: $\mathbb{C}$ Menge der komplexen Zahlen.

`b)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Menge der komplexen Zahlen)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ Menge der komplexen Zahlen).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ Menge der komplexen Zahlen… ”
folgt via **96-7(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathbb{C}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “…$\mathfrak{D}$ Menge der komplexen Zahlen”
folgt via **96-7(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathbb{C}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

`c)`

Aus “$\mathbb{B} = \mathbb{B}$”
folgt via **96-7(Def)**: $\mathbb{B}$ Menge der bkomplexen Zahlen.

`d)` `VS` gleich ($\mathfrak{C}$ Menge der bkomplexen Zahlen)
$\wedge$($\mathfrak{D}$ Menge der bkomplexen Zahlen).

`1.1:` Aus `VS` gleich “$\mathfrak{C}$ Menge der bkomplexen Zahlen… ”
folgt via **96-7(Def)**: $\mathfrak{C} = \mathbb{B}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich “…$\mathfrak{D}$ Menge der bkomplexen Zahlen”
folgt via **96-7(Def)**: $\mathfrak{D} = \mathbb{B}$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt: $\mathfrak{C} = \mathfrak{D}$.

$\square$

RECH−Notation. Es werden die üblichen Vorzeichen-Notationen und das übliche "Punkt- vor Strichrechnung" in die Essays eingeführt. Hierbei sind unter anderem "$-x \cdot y$" und "$(-x) \cdot y$" sowie "$-x : y$" und "$(-x) : y$" voneinander zu unterscheiden:

RECH-Notation

1) $-x = \mathsf{mns}(x)$.

2) $x + y = \mathsf{A}((x, y))$.

3) $x - y = x + (-y)$.

4) $-x + y = (-x) + y$.

5) $-x - y = (-x) + (-y)$.

6) $x \cdot y = \mathsf{M}((x, y))$.

7) $-x \cdot y = \mathsf{mns}(x \cdot y)$.

8) $x : y = x \cdot \mathsf{rez}(y)$.

9) $-x : y = \mathsf{mns}(x : y)$.

...

RECH-Notation

...

10) $x + y \cdot z = x + (y \cdot z)$.

11) $x - y \cdot z = x - (y \cdot z)$.

12) $-x + y \cdot z = -x + (y \cdot z)$.

13) $-x - y \cdot z = -x - (y \cdot z)$.

14) $x + y : z = x + (y : z)$.

15) $x - y : z = x - (y : z)$.

16) $-x + y : z = -x + (y : z)$.

17) $-x - y : z = -x - (y : z)$.

18) $x \cdot y + z = (x \cdot y) + z$.

19) $x \cdot y - z = (x \cdot y) - z$.

20) $-x \cdot y + z = -(x \cdot y) + z$.

21) $-x \cdot y - z = -(x \cdot y) - z$.

22) $x : y + z = (x : y) + z$.

23) $x : y - z = (x : y) - z$.

24) $-x : y + z = -(x : y) + z$.

25) $-x : y - z = -(x : y) - z$.

...

RECH-Notation

...

26) $x \cdot y + z \cdot w = (x \cdot y) + (z \cdot w)$.

27) $x \cdot y - z \cdot w = (x \cdot y) - (z \cdot w)$.

28) $-x \cdot y + z \cdot w = -(x \cdot y) + (z \cdot w)$.

28) $-x \cdot y - z \cdot w = -(x \cdot y) - (z \cdot w)$.

29) $x : y + z \cdot w = (x : y) + (z \cdot w)$.

30) $x : y - z \cdot w = (x : y) - (z \cdot w)$.

31) $-x : y + z \cdot w = -(x : y) + (z \cdot w)$.

32) $-x : y - z \cdot w = -(x : y) - (z \cdot w)$.

33) $x \cdot y + z : w = (x \cdot y) + (z : w)$.

34) $x \cdot y - z : w = (x \cdot y) - (z : w)$.

35) $-x \cdot y + z : w = -(x \cdot y) + (z : w)$.

36) $-x \cdot y - z : w = -(x \cdot y) - (z : w)$.

37) $x : y + z : w = (x : y) + (z : w)$.

38) $x : y - z : w = (x : y) - (z : w)$.

39) $-x : y + z : w = -(x : y) + (z : w)$.

40) $-x : y - z : w = -(x : y) - (z : w)$.

96-9. x ist unter anderem genau dann eine Zahl, wenn $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$ oder $\mathsf{Re}x$ eine Zahl ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$ oder $\mathsf{Im}x$ eine Zahl ist:

96-9(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)`, `viii)`, `ix)` *sind äquivalent:*

`i)` x *Zahl.*

`ii)` $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`iii)` $\mathsf{Re}x$ *Zahl.*

`iv)` $\mathsf{Re}x$ *Menge.*

`v)` $\mathsf{Re}x \neq \mathcal{U}$.

`vi)` $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`vii)` $\mathsf{Im}x$ *Zahl.*

`viii)` $\mathsf{Im}x$ *Menge.*

`ix)` $\mathsf{Im}x \neq \mathcal{U}$.

`REIM.`**-Notation**

Beweis **96-9** `i)` $\Rightarrow$ `ii)` `VS` gleich $x \in \mathbb{A}$.

Aus **AAII**"$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **21-4**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`ii)` $\Rightarrow$ `iii)` `VS` gleich $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: $\mathsf{Re}x$ Zahl.

<u>Beweis **96-9**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ VS gleich $\mathsf{Re}x$ Zahl.

Aus VS gleich "$\mathsf{Re}x$ Zahl"
folgt via **95-6**: $\mathsf{Re}x$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ VS gleich $\mathsf{Re}x$ Menge.

Aus VS gleich "$\mathsf{Re}x$ Menge"
folgt via **0-17**: $\mathsf{Re}x \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vi)}}}$ VS gleich $\mathsf{Re}x \neq \mathcal{U}$.

1: Aus **AAII**"$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$" und
aus VS gleich "$\mathsf{Re}x \neq \mathcal{U}$"
folgt via **94-11**: $x \in \mathbb{A}$.

2: Aus **AAII**"$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$" und
aus 1"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **21-4**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{vii)}}}$ VS gleich $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **0-4**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{A}$.

2: Aus 1"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: $\mathsf{Im}x$ Zahl.

$\boxed{\boxed{\texttt{vii)} \Rightarrow \texttt{viii)}}}$ VS gleich $\mathsf{Im}x$ Zahl.

Aus VS gleich "$\mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **95-6**: $\mathsf{Im}x$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{viii)} \Rightarrow \texttt{ix)}}}$ VS gleich $\mathsf{Im}x$ Menge.

Aus VS gleich "$\mathsf{Im}x$ Menge"
folgt via **0-17**: $\mathsf{Im}x \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ix)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $\mathsf{Im}x \neq \mathcal{U}$.

1: Aus **AAII**"$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$" und
aus VS gleich "$\mathsf{Im}x \neq \mathcal{U}$"
folgt via **94-11**: $x \in \mathbb{A}$.

2: Aus 1"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

□

96-10. Via Negation folgt aus **96-9** das nunmehrige Kriterium:

96-10(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)`, `viii)`, `ix)` *sind äquivalent:*

i) $x \notin \mathbb{A}$.

ii) $\mathsf{Re}x \notin \mathbb{T}$.

iii) $\mathsf{Re}x \notin \mathbb{A}$.

iv) $\mathsf{Re}x$ *Unmenge.*

v) $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

vi) $\mathsf{Im}x \notin \mathbb{T}$.

vii) $\mathsf{Im}x \notin \mathbb{A}$.

viii) $\mathsf{Im}x$ *Unmenge.*

ix) $\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$.

`REIM`-**Notation**.

Beweis **96-10**

1.1: Via **96-9** gilt:
$$(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \neq \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \neq \mathcal{U}).$$

1.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A})$.

2.1: Aus 1.1 und
aus 1.2
folgt: $$(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \neq \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \neq \mathcal{U}).$$

2.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \in \mathbb{A})$.

3.1: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $$(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \in \mathbb{A})(\mathsf{Re}x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \neq \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \neq \mathcal{U}).$$

3.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(\mathsf{Im}x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \in \mathbb{A})$.

4: Aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $$(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \neq \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \neq \mathcal{U}).$$

5: Aus 4
folgt: $$x \notin \mathbb{A}$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \notin \mathbb{T})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \notin \mathbb{A})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Re}x \text{ Unmenge})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Re}x = \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \notin \mathbb{T})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \notin \mathbb{A})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Im}x \text{ Unmenge})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{Im}x = \mathcal{U}).$$

□

96-11. Hier wird unter anderem gezeigt, dass x genau dann eine Zahl, wenn $-x$ eine Zahl ist und dies ist genau dann der Fall, wenn $\mathsf{rez}(x)$ eine Zahl ist:

96-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)` *sind äquivalent:*

`i)` x *Zahl.*

`ii)` $-x$ *Zahl.*

`iv)` $-x$ *Menge.*

`vi)` $-x \neq \mathcal{U}$.

`iii)` $\mathsf{rez}(x)$ *Zahl.*

`v)` $\mathsf{rez}(x)$ *Menge.*

`vii)` $\mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-11** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich x Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich “x Zahl”
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus **AAII**“$\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$” und
aus `1`“$x \in \mathbb{A}$”
folgt via **94-11**: $\mathsf{mns}(x) \in \mathbb{A}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $-x \in \mathbb{A}$.

`4:` Aus `3`“$-x \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: $-x$ Zahl.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $-x$ Zahl.

Aus `VS` gleich “$-x$ Zahl”
folgt via **95-6**: $-x$ Menge.

Beweis **96-11** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $-x$ Menge.

Aus `VS` gleich "$-x$ Menge"
folgt via **0-17**: $-x \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $-x \neq \mathcal{U}$.

1: Aus `VS` gleich "$-x \neq \mathcal{U}$"
folgt: $\mathsf{mns}(x) \neq \mathcal{U}$.

2: Aus **AAII**"$\mathsf{mns} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus 1"$\mathsf{mns}(x) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **94-11**: $x \in \mathbb{A}$.

3: Aus **AAII**"$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus 2"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **94-11**: $\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{A}$.

4: Aus 3"$\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vi)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

Aus `VS` gleich "$\mathsf{rez}(x)$ Zahl"
folgt via **95-6**: $\mathsf{rez}(x)$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{vii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{rez}(x)$ Menge.

Aus `VS` gleich "$\mathsf{rez}(x)$ Menge"
folgt via **0-17**: $\mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{vii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}$.

1: Aus **AAII**"$\mathsf{rez} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus `VS` gleich "$\mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **94-11**: $x \in \mathbb{A}$.

2: Aus 1"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

$\square$

96-12. Das nunmehrige Kriterium folgt via Negation folgt aus **96-11**:

96-12(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii), iv), v), vi), vii) *sind äquivalent:*

i) $x \notin \mathbb{A}$.

ii) $-x \notin \mathbb{A}$.

iv) $-x$ *Unmenge.*

vi) $-x = \mathcal{U}$.

iii) $\mathsf{rez}(x) \notin \mathbb{A}$.

v) $\mathsf{rez}(x)$ *Unmenge.*

vii) $\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **96-12**</u>

`1.1:` Via **96-11** gilt:

$$(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (-x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (-x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (-x \neq \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}).$$

`1.2:` Via **95-4(Def)** gilt: $$(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A}).$$

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (-x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (-x \neq \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}).$$

`2.2:` Via **95-4(Def)** gilt: $$(-x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{A}).$$

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

$$(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (-x \neq \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}).$$

`3.2:` Via **95-4(Def)** gilt: $$(\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{A}).$$

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt:

$$(x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-x \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (-x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (-x \neq \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \text{ Menge}) \Leftrightarrow (\mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}).$$

`5:` Aus `4`
folgt:

$$\begin{aligned} & x \notin \mathbb{A} \\ \Leftrightarrow\ & (-x \notin \mathbb{A}) \\ \Leftrightarrow\ & (-x \text{ Unmenge}) \\ \Leftrightarrow\ & (-x = \mathcal{U}) \\ \Leftrightarrow\ & (\mathsf{rez}(x) \notin \mathbb{A}) \\ \Leftrightarrow\ & (\mathsf{rez}(x) \text{ Unmenge}) \\ \Leftrightarrow\ & (\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}). \end{aligned}$$

$\square$

96-13. x, y sind genau dann Zahlen, wenn $x+y$ eine Zahl ist und dies ist unter anderem genau dann der Fall, wenn $x+y \neq \mathcal{U}$:

96-13(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"x Zahl" und "y Zahl".*

`ii)` $x+y$ *Zahl.*

`iii)` $y+x$ *Zahl.*

`iv)` $x+y$ *Menge.*

`v)` $y+x$ *Menge.*

`vi)` $x+y \neq \mathcal{U}$.

`vii)` $y+x \neq \mathcal{U}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **96-13**

1: Via **AAII** gilt: A Algebra in $\mathbb{A}$.

2.1: Aus 1"A Algebra in $\mathbb{A}$"
folgt via **93-12**: $((x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (x + y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (y + x \in \mathbb{A})$
$\Leftrightarrow (x + y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y + x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x + y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y + x \neq \mathcal{U})$.

2.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A})$.

3.1: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (x + y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (y + x \in \mathbb{A})$
$\Leftrightarrow (x + y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y + x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x + y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y + x \neq \mathcal{U})$.

3.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{A})$.

4.1: Aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $((x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (x + y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (y + x \in \mathbb{A})$
$\Leftrightarrow (x + y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y + x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x + y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y + x \neq \mathcal{U})$.

4.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(x + y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x + y \in \mathbb{A})$.

5.1: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $((x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (x + y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y + x \in \mathbb{A})$
$\Leftrightarrow (x + y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y + x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x + y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y + x \neq \mathcal{U})$.

5.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(y + x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y + x \in \mathbb{A})$.

6: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt:

$$\begin{aligned}
&(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}) \\
&\Leftrightarrow (x + y \text{ Zahl}) \\
&\Leftrightarrow (y + x \text{ Zahl}) \\
&\Leftrightarrow (x + y \text{ Menge}) \\
&\Leftrightarrow (y + x \text{ Menge}) \\
&\Leftrightarrow (x + y \neq \mathcal{U}) \\
&\Leftrightarrow (y + x \neq \mathcal{U}).
\end{aligned}$$

□

96-14. Dieses Kriterium könnte auch via Negation aus **96-13** erhalten werden:

96-14(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"$x \notin \mathbb{A}$" oder "$y \notin \mathbb{A}$".*

`ii)` $x + y \notin \mathbb{A}$.

`iii)` $y + x \notin \mathbb{A}$.

`iv)` $x + y$ *Unmenge.*

`v)` $y + x$ *Unmenge.*

`vi)` $x + y = \mathcal{U}$.

`vii)` $y + x = \mathcal{U}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-14**

`1:` Via **AAII** gilt: A Algebra in $\mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`"A Algebra in $\mathbb{A}$"
folgt via **93-13**:

$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$$
$$\Leftrightarrow (x + y \notin \mathbb{A})$$
$$\Leftrightarrow (y + x \notin \mathbb{A})$$
$$\Leftrightarrow (x + y \text{ Unmenge})$$
$$\Leftrightarrow (y + x \text{ Unmenge})$$
$$\Leftrightarrow (x + y = \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (y + x = \mathcal{U}).$$

□

96-15. x, y sind genau dann Zahlen, wenn $x \cdot y$ eine Zahl ist und dies ist unter anderem genau dann der Fall, wenn $x \cdot y \neq \mathcal{U}$:

96-15(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"x Zahl" und "y Zahl".*

`ii)` $x \cdot y$ *Zahl.*

`iii)` $y \cdot x$ *Zahl.*

`iv)` $x \cdot y$ *Menge.*

`v)` $y \cdot x$ *Menge.*

`vi)` $x \cdot y \neq \mathcal{U}$.

`vii)` $y \cdot x \neq \mathcal{U}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-15**

1: Via **AAII** gilt: M Algebra in $\mathbb{A}$.

2.1: Aus 1"M Algebra in $\mathbb{A}$"
folgt via **93-12**: $((x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (x \cdot y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (y \cdot x \in \mathbb{A})$
$\Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y \cdot x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \cdot y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y \cdot x \neq \mathcal{U})$.

2.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A})$.

3.1: Aus 2.1 und
aus 2.2
folgt: $((x \text{ Zahl}) \wedge (y \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (x \cdot y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (y \cdot x \in \mathbb{A})$
$\Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y \cdot x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \cdot y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y \cdot x \neq \mathcal{U})$.

3.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{A})$.

4.1: Aus 3.1 und
aus 3.2
folgt: $((x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (x \cdot y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (y \cdot x \in \mathbb{A})$
$\Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y \cdot x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \cdot y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y \cdot x \neq \mathcal{U})$.

4.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(x \cdot y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \cdot y \in \mathbb{A})$.

5.1: Aus 4.1 und
aus 4.2
folgt: $((x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y \cdot x \in \mathbb{A})$
$\Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y \cdot x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x \cdot y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y \cdot x \neq \mathcal{U})$.

5.2: Via **95-4(Def)** gilt: $(y \cdot x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y \cdot x \in \mathbb{A})$.

6: Aus 5.1 und
aus 5.2
folgt:
$$(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$$
$$\Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Zahl})$$
$$\Leftrightarrow (y \cdot x \text{ Zahl})$$
$$\Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Menge})$$
$$\Leftrightarrow (y \cdot x \text{ Menge})$$
$$\Leftrightarrow (x \cdot y \neq \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (y \cdot x \neq \mathcal{U}).$$

$\square$

96-16. Dieses Kriterium könnte auch via Negation aus **96-15** erhalten werden:

96-16(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"$x \notin \mathbb{A}$" oder "$y \notin \mathbb{A}$".*

`ii)` $x \cdot y \notin \mathbb{A}$.

`iii)` $y \cdot x \notin \mathbb{A}$.

`iv)` $x \cdot y$ *Unmenge.*

`v)` $y \cdot x$ *Unmenge.*

`vi)` $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`vii)` $y \cdot x = \mathcal{U}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-16**

`1:` Via **AAII** gilt: M Algebra in $\mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`"M Algebra in $\mathbb{A}$"
folgt via **93-13**:

$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x \cdot y \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (y \cdot x \notin \mathbb{A}) \Leftrightarrow (x \cdot y \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (y \cdot x \text{ Unmenge}) \Leftrightarrow (x \cdot y = \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y \cdot x = \mathcal{U}).$$

□

96-17. x, y sind genau dann Zahlen, wenn $x : y$ eine Zahl ist und dies ist unter anderem genau dann der Fall, wenn $x : y \neq \mathcal{U}$. Die Beweis-Reihenfolge ist `i)` $\Rightarrow$ `ii)` $\Rightarrow$ `iv)` $\Rightarrow$ `vi)` - `iii)` $\Rightarrow$ `v)` $\Rightarrow$ `vii)` $\Rightarrow$ `i)`:

96-17(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"x Zahl" und "y Zahl".*

`ii)` *$x : y$ Zahl.*

`iii)` *$y : x$ Zahl.*

`iv)` *$x : y$ Menge.*

`v)` *$y : x$ Menge.*

`vi)` *$x : y \neq \mathcal{U}$.*

`vii)` *$y : x \neq \mathcal{U}$.*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-17** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$\ldots y$ Zahl"
folgt via **96-11**: $\mathsf{rez}(y)$ Zahl.

`2:` Aus `VS` gleich "x Zahl$\ldots$" und
aus `1` "$\mathsf{rez}(y)$ Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot \mathsf{rez}(y)$ Zahl.

`3:` Aus `2`
folgt: $x : y$ Zahl.

$\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}$ `VS` gleich $x : y$ Zahl.

Aus `VS` gleich "$x : y$ Zahl"
folgt via **95-6**: $x : y$ Menge.

$\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{vi)}}$ `VS` gleich $x : y$ Menge.

Aus `VS` gleich "$x : y$ Menge"
folgt via **0-17**: $x : y \neq \mathcal{U}$.

Beweis **96-17** $\boxed{\boxed{\texttt{vi)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ VS gleich $x : y \neq \mathcal{U}$.

1: Aus VS gleich "$x : y \neq \mathcal{U}$"
folgt: $x \cdot \mathsf{rez}(y) \neq \mathcal{U}$

2: Aus 1"$x \cdot \mathsf{rez}(y) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **96-15**: $(x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{rez}(y) \text{ Zahl})$.

3.1: Aus 2"x Zahl…"
folgt via **96-11**: $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

3.2: Aus 2"…$\mathsf{rez}(y)$ Zahl"
folgt via **96-11**: y Zahl.

4: Aus 3.2"y Zahl" und
aus 3.1"$\mathsf{rez}(x)$ Zahl"
folgt via **96-15**: $y \cdot \mathsf{rez}(x)$ Zahl.

5: Aus 4"$y \cdot \mathsf{rez}(x)$ Zahl"
folgt: $y : x$ Zahl.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ VS gleich $y : x$ Zahl.

Aus VS gleich "$y : x$ Zahl"
folgt via **95-6**: $y : x$ Menge.

$\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{vii)}}}$ VS gleich $y : x$ Menge.

Aus VS gleich "$y : x$ Menge"
folgt via **0-17**: $y : x \neq \mathcal{U}$.

$\boxed{\boxed{\texttt{vii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ VS gleich $y : x \neq \mathcal{U}$.

1: Aus VS gleich "$y : x \neq \mathcal{U}$"
folgt: $y \cdot \mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}$.

2: Aus 1"$y \cdot \mathsf{rez}(x) \neq \mathcal{U}$"
folgt via **96-15**: $(y \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl})$.

3: Aus 2"…$\mathsf{rez}(x)$ Zahl"
folgt via **96-11**: x Zahl.

4: Aus 3"x Zahl" und
aus 2"y Zahl…"
folgt: $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

□

96-18. Das nunmehrige Kriterium folgt via Negation aus **96-17**:

96-18(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)`, `vi)`, `vii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"$x \notin \mathbb{A}$" oder "$y \notin \mathbb{A}$".*

`ii)` $x : y \notin \mathbb{A}$.

`iii)` $y : x \notin \mathbb{A}$.

`iv)` $x : y$ *Unmenge.*

`v)` $y : x$ *Unmenge.*

`vi)` $x : y = \mathcal{U}$.

`vii)` $y : x = \mathcal{U}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **96-18**

`1.1:` Via **96-17** gilt:

$$((x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (x : y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y : x \text{ Zahl})$$
$$\Leftrightarrow (x : y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y : x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x : y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y : x \neq \mathcal{U}).$$

`1.2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$((x \in \mathbb{A}) \wedge (y \text{ Zahl})) \Leftrightarrow (x : y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y : x \text{ Zahl})$$
$$\Leftrightarrow (x : y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y : x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x : y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y : x \neq \mathcal{U}).$$

`2.2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y \in \mathbb{A})$.

`3.1:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt:

$$((x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (x : y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y : x \text{ Zahl})$$
$$\Leftrightarrow (x : y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y : x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x : y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y : x \neq \mathcal{U}).$$

`3.2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(x : y \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (x : y \in \mathbb{A})$.

`4.1:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt:

$$((x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (x : y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (y : x \text{ Zahl})$$
$$\Leftrightarrow (x : y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y : x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x : y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y : x \neq \mathcal{U}).$$

`4.2:` Via **95-4(Def)** gilt: $(y : x \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (y : x \in \mathbb{A})$.

`5:` Aus `4.1` und
aus `4.2`
folgt:

$$((x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow (x : y \in \mathbb{A}) \Leftrightarrow (y : x \in \mathbb{A})$$
$$\Leftrightarrow (x : y \text{ Menge}) \Leftrightarrow (y : x \text{ Menge}) \Leftrightarrow (x : y \neq \mathcal{U}) \Leftrightarrow (y : x \neq \mathcal{U}).$$

`6:` Aus `5`
folgt:

$$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$$
$$\Leftrightarrow (x : y \notin \mathbb{A})$$
$$\Leftrightarrow (y : x \notin \mathbb{A})$$
$$\Leftrightarrow (x : y \text{ Unmenge})$$
$$\Leftrightarrow (y : x \text{ Unmenge})$$
$$\Leftrightarrow (x : y = \mathcal{U})$$
$$\Leftrightarrow (y : x = \mathcal{U}).$$

□

96-19. In diesem Satz wird unter anderem fest gestellt, dass $\mathcal{U}+\mathcal{U}=\mathcal{U}$:

96-19(Satz)

a) $\mathsf{Re}\mathcal{U}=\mathcal{U}$.

b) $\mathsf{Im}\mathcal{U}=\mathcal{U}$.

c) $-\mathcal{U}=\mathcal{U}$.

d) $\mathsf{rez}(\mathcal{U})=\mathcal{U}$.

e) $x+\mathcal{U}=\mathcal{U}$.

f) $\mathcal{U}+y=\mathcal{U}$.

g) $x\cdot\mathcal{U}=\mathcal{U}$.

h) $\mathcal{U}\cdot y=\mathcal{U}$.

i) $x:\mathcal{U}=\mathcal{U}$.

j) $\mathcal{U}:y=\mathcal{U}$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **96-19**</u>

`1:` Via **94-1** gilt: $\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$.

`2.a):` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2.b):` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2.c):` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $-\mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2.d):` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $\mathsf{rez}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

`2.e):` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-14**: $x + \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2.f):` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-14**: $\mathcal{U} + y = \mathcal{U}$.

`2.g):` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-16**: $x \cdot \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2.h):` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-16**: $\mathcal{U} \cdot y = \mathcal{U}$.

`2.i):` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $x : \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

`2.j):` Aus `1`“$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $\mathcal{U} : y = \mathcal{U}$.

$\square$

96-20. Eigentlich kommt die nun folgende Definition von $\mathsf{ab2}$ zu früh, da die zum Beweis wichtiger Eigenschaften von $\mathsf{ab2}$ - etwa $\mathsf{ran}\,\mathsf{ab2} \subseteq \mathbb{T}$ - benötigten Hilfsmittel noch nicht zur Verfügung stehen. Andererseits wird mit der Einführung von $\mathsf{ab2}$ das bald folgende **AAIV** besser formulierbar. Die Buchstaben "$\mathtt{ab}$" sollen an "Absolut-Betrag" erinnern, die "2" deutet an, dass es sich um das *Quadrat* des Absolut-Betrags handelt:

96-20(Definition)

$\mathsf{ab2} = \mathsf{96.2()}$

$= \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega))\wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$

REIM.RECH-**Notation**.

96-21. Nun werden einige Eigenschaften von Elementen von $\mathsf{ab2}$ angegeben:

96-21(Satz)

a) *Aus* “$w \in \mathsf{ab2}$” *folgt* “$\exists\Omega : w = (\Omega, (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega))$”.

b) *Aus* “$(p, q) \in \mathsf{ab2}$” *folgt* “p *Zahl*” *und* “q *Zahl*”
und “$q = (\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$”.

c) *Aus* “p *Zahl*” *folgt* “$(p, (\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)) \in \mathsf{ab2}$”.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **96-21** `a)` `VS` gleich $w \in \mathsf{ab2}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$w \in \mathsf{ab2}$” und
aus “$\mathsf{ab2} = \{\omega : (\exists\Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega)) \wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}$”
folgt:
$$w \in \{\omega : (\exists\Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega)) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

`3:` Aus `2`“$w \in \{\omega : (\exists\Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega)) \wedge(\omega = (\Omega, \Psi)))\}$”
folgt: $\exists\Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega)) \wedge (w = (\Omega, \Psi))$.

`4:` Aus `3`“$\ldots \Psi = (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega) \ldots$”
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (\Omega, (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega))$.

`5:` Aus `2`“$\ldots w = (\Omega, \Psi)$” und
aus `4`“$(\Omega, \Psi) = (\Omega, (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega))$”
folgt: $w = (\Omega, (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega))$.

`6:` Aus `3`“$\exists\Omega \ldots$” und
aus `5`“$w = (\Omega, (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega))$”
folgt: $\exists\Omega : w = (\Omega, (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega))$.

<u>Beweis **96-21**</u> `b)` `VS` gleich $(p,q)\in \mathsf{ab2}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in \mathsf{ab2}$"
folgt via **ElementAxiom**: (p,q) Menge.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$(p,q)\in \mathsf{ab2}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`:
$$\exists\Omega : (p,q) = (\Omega, (\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)).$$

`2:` Aus `1.1`"(p,q) Menge" und
aus `1.2`"$\ldots(p,q) = (\Omega, (\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega))$"
folgt via **IGP**: $(p=\Omega)\wedge(q=(\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega))$
$\wedge((\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)$ Menge$)$.

`3.1:` Aus `2`"$p=\Omega\ldots$" und
aus `2`"$\ldots q=(\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)\ldots$"
folgt: $q=(\mathsf{Re}p)\cdot(\mathsf{Re}p)+(\mathsf{Im}p)\cdot(\mathsf{Im}p)$.

`3.2:` Aus `2`"$\ldots(\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)$ Menge"
folgt via **96-13**: $(\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)$ Zahl.

`3.3:` Aus `2`"$\ldots(\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)$ Menge"
folgt via **96-13**: $((\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)$ Zahl$)\wedge((\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)$ Zahl$)$.

`4.1:` Aus `1.2`"$\ldots q=(\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)$" und
aus `3.2`"$(\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)+(\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)$ Zahl"
folgt: q Zahl.

`4.2:` Aus `3.3`"$(\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega)$ Zahl$\ldots$"
folgt via **96-15**: $\mathsf{Re}\Omega$ Zahl.

`5:` Aus `4.2`"$\mathsf{Re}\Omega$ Zahl"
folgt via **96-9**: Ω Zahl.

`6:` Aus `2`"$p=\Omega\ldots$" und
aus `5`"Ω Zahl"
folgt: p Zahl.

`7:` Aus `6`"p Zahl",
aus `4.1`"q Zahl" und
aus `3.1`"$q=(\mathsf{Re}p)\cdot(\mathsf{Re}p)+(\mathsf{Im}p)\cdot(\mathsf{Im}p)$"
folgt: $(p$ Zahl$)\wedge(q$ Zahl$)\wedge(q=(\mathsf{Re}p)\cdot(\mathsf{Re}p)+(\mathsf{Im}p)\cdot(\mathsf{Im}p))$.

<u>Beweis **96-21**</u> `c) VS` gleich p Zahl.

`1.1:` Es gilt: $\exists \Omega : \Omega = p$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "p Zahl"
folgt via **95-6**: p Menge.

`1.3:` Aus `VS` gleich "p Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}p \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{Im}p \text{ Zahl})$.

`2.1:` Aus `1.3`"$\mathsf{Re}p$ Zahl..." und
aus `1.3`"$\mathsf{Re}p$ Zahl..."
folgt via **96-15**: $(\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p)$ Zahl.

`2.2:` Aus `1.3`"...$\mathsf{Im}p$ Zahl" und
aus `1.3`"...$\mathsf{Im}p$ Zahl"
folgt via **96-15**: $(\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$ Zahl.

`3.1:` Aus `2.1`"$(\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p)$ Zahl" und
aus `2.2`"$(\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$ Zahl"
folgt via **96-13**: $(\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$ Zahl.

`3.2:` Es gilt: $\exists \Psi : \Psi = (\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$.

`3.3:` Aus `1.1`"...$\Omega = p$"
folgt: $(\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega) = (\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$.

`4.1:` Aus `3.1`"$(\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$ Zahl"
folgt via **95-6**: $(\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$ Menge.

`4.2:` Aus `3.2`"...$\Psi = (\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$" und
aus `3.3`"$(\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega) = (\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$"
folgt: $\Psi = (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega)$.

`4.3:` Aus `1.1`"...$\Omega = p$" und
aus `3.2`"...$\Psi = (\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$"
folgt via **PaarAxiom I**: $(\Omega, \Psi) = (p, (\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p))$.

`5.1:` Aus `1.2`"p Menge" und
aus `4.1`"$(\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)$ Menge"
folgt via **PaarAxiom I**: $(p, (\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p))$ Menge.

`5.2:` Aus `4.3`
folgt: $(p, (\mathsf{Re}p) \cdot (\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p) \cdot (\mathsf{Im}p)) = (\Omega, \Psi)$.

...

Beweis **96-21** `c) VS` gleich p Zahl.

...

`6:` Aus `1.1`"$\exists\Omega\ldots$",
aus `3.2`"$\exists\Psi\ldots$",
aus `4.2`"$\Psi = (\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)$" und
aus `5.2`"$(p, (\mathsf{Re}p)\cdot(\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p)\cdot(\mathsf{Im}p)) = (\Omega, \Psi)$"
folgt:
$$\exists\Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)) \wedge((p, (\mathsf{Re}p)\cdot(\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p)\cdot(\mathsf{Im}p)) = (\Omega, \Psi)).$$

`7:` Aus `5.1`"$((p, (\mathsf{Re}p)\cdot(\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p)\cdot(\mathsf{Im}p))$ Menge" und
aus `6`"$\exists\Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)) \wedge((p, (\mathsf{Re}p)\cdot(\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p)\cdot(\mathsf{Im}p)) = (\Omega, \Psi))$"
folgt:
$$(p, (\mathsf{Re}p)\cdot(\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p)\cdot(\mathsf{Im}p)) \in \{\omega : (\exists\Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}.$$

`8:` Aus `7`"$(p, (\mathsf{Re}p)\cdot(\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p)\cdot(\mathsf{Im}p)) \in \{\omega : (\exists\Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$" und
aus "$\{\omega : (\exists\Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega)\cdot(\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega)\cdot(\mathsf{Im}\Omega)) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\} = \mathsf{ab2}$"
folgt: $(p, (\mathsf{Re}p)\cdot(\mathsf{Re}p) + (\mathsf{Im}p)\cdot(\mathsf{Im}p)) \in \mathsf{ab2}.$

□

96-22. Mit den nun vorliegenden Eigenschaften von $\mathsf{ab2}$ kann **AAIV** gut formuliert werden. Weitere Eigenschaften - etwa $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$ - werden später bewiesen. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - d) - f) - e) - b)`:

96-22(Satz)

`a)` $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`b)` $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`c)` *Aus "x Zahl" folgt "$\mathsf{ab2}(x)$ Zahl".*

`d)` *Aus "$x \notin \mathbb{A}$" folgt "$\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$".*

`e)` *"$\mathsf{ab2}(x)$ Zahl" oder "$\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$".*

`f)` $\mathsf{ab2}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **96-22** `a)`

`Thema1.1` $\alpha \in \mathsf{ab2}$.

`2:` Aus `Thema1.1` "$\alpha \in \mathsf{ab2}$" und
aus "$\mathsf{ab2} = \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega)) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega)) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$.

`3:` Aus 2 "$\alpha \in \{\omega : (\exists \Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega)) \wedge (\omega = (\Omega, \Psi)))\}$"
folgt: $\exists \Omega, \Psi : (\Psi = (\mathsf{Re}\Omega) \cdot (\mathsf{Re}\Omega) + (\mathsf{Im}\Omega) \cdot (\mathsf{Im}\Omega)) \wedge (\alpha = (\Omega, \Psi))$.

`4:` Aus 3
folgt: $\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi)$.

Ergo `Thema1.1`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ab2}) \Rightarrow (\exists \Omega, \Psi : \alpha = (\Omega, \Psi))$.

Konsequenz via **10-3**: `A1` | "$\mathsf{ab2}$ Relation"

...

<u>Beweis **96-22**</u> `a)` ...

`Thema1.2` $((\alpha,\beta)\in\mathsf{ab2})\wedge((\alpha,\gamma)\in\mathsf{ab2})$.

`2.1:` Aus `Thema1.2`"$(\alpha,\beta)\in\mathsf{ab2}\ldots$"
folgt via **96-21**: $\beta=(\mathsf{Re}\alpha)\cdot(\mathsf{Re}\alpha)+(\mathsf{Im}\alpha)\cdot(\mathsf{Im}\alpha)$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`"$\ldots(\alpha,\gamma)\in\mathsf{ab2}$"
folgt via **96-21**: $\gamma=(\mathsf{Re}\alpha)\cdot(\mathsf{Re}\alpha)+(\mathsf{Im}\alpha)\cdot(\mathsf{Im}\alpha)$.

`3:` Aus `2.1` und
aus `2.2`
folgt: $\beta=\gamma$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` "$\forall\alpha,\beta,\gamma:(((\alpha,\beta)\in\mathsf{ab2})\wedge((\alpha,\gamma)\in\mathsf{ab2}))\Rightarrow(\beta=\gamma)$"

`Thema1.3` $\alpha\in\mathsf{dom\,ab2}$.

`2:` Aus `Thema1.3`"$\alpha\in\mathsf{dom\,ab2}$"
folgt via **7-7**: $\exists\Omega:(\alpha,\Omega)\in\mathsf{ab2}$.

`3:` Aus `2`"$\ldots(\alpha,\Omega)\in\mathsf{ab2}$"
folgt via **96-21**: α Zahl.

`4:` Aus `3`"α Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $\alpha\in\mathbb{A}$.

Ergo `Thema1.3`: $\forall\alpha:(\alpha\in\mathsf{dom\,ab2})\Rightarrow(\alpha\in\mathbb{A})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A3` "$\mathsf{dom\,ab2}\subseteq\mathbb{A}$"

`Thema1.4` $\alpha\in\mathbb{A}$.

`2:` Aus `Thema1.4`"$\alpha\in\mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: α Zahl.

`3:` Aus `2`"α Zahl"
folgt via **96-21**: $(\alpha,(\mathsf{Re}\alpha)\cdot(\mathsf{Re}\alpha)+(\mathsf{Im}\alpha)\cdot(\mathsf{Im}\alpha))\in\mathsf{ab2}$.

`4:` Aus `3`"$(\alpha,(\mathsf{Re}\alpha)\cdot(\mathsf{Re}\alpha)+(\mathsf{Im}\alpha)\cdot(\mathsf{Im}\alpha))\in\mathsf{ab2}$"
folgt via **7-5**: $\alpha\in\mathsf{dom\,ab2}$.

Ergo `Thema1.4`: $\forall\alpha:(\alpha\in\mathbb{A})\Rightarrow(\alpha\in\mathsf{dom\,ab2})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A4` "$\mathbb{A}\subseteq\mathsf{dom\,ab2}$"

...

Beweis **96-22** `a)` ...

`Thema1.5`	$\alpha \in \mathsf{ran\,ab2}$.
`2:` Aus `Thema1.5`"$\alpha \in \mathsf{ran\,ab2}$" folgt via **7-7**:	$\exists \Omega : (\Omega, \alpha) \in \mathsf{ab2}$.
`3:` Aus `3`"$\ldots (\Omega, \alpha) \in \mathsf{ab2}$" folgt via **96-21**:	α Zahl.
`4:` Aus `3`"α Zahl" folgt via **95-4(Def)**:	$x \in \mathbb{A}$.

Ergo `Thema1.5`: $\forall \alpha : (\alpha \in \mathsf{ran\,ab2}) \Rightarrow (\alpha \in \mathbb{A})$.

Konsequenz via **0-2(Def)**: `A5` "$\mathsf{ran\,ab2} \subseteq \mathbb{A}$"

`1.6:` Aus `A1` gleich "$\mathsf{ab2}$ Relation" und
aus `A2` gleich "$\forall \alpha, \beta, \gamma : (((\alpha, \beta) \in \mathsf{ab2}) \wedge ((\alpha, \gamma) \in \mathsf{ab2})) \Rightarrow (\beta = \gamma)$"
folgt via **18-18(Def)**: $\mathsf{ab2}$ Funktion.

`2:` Aus `A3` gleich "$\mathsf{dom\,ab2} \subseteq \mathbb{A}$" und
aus `A4` gleich "$\mathbb{A} \subseteq \mathsf{dom\,ab2}$"
folgt via **GleichheitsAxiom**: $\mathsf{dom\,ab2} = \mathbb{A}$.

`3:` Aus `1.6`"$\mathsf{ab2}$ Funktion",
aus `2`"$\mathsf{dom\,ab2} = \mathbb{A}$" und
aus `5`"$\mathsf{ran\,ab2} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`c)` `VS` gleich x Zahl.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **95-4(Def)**: $x \in \mathbb{A}$.

`1.2:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2`"$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus `1.1`"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **94-11**: $\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{A}$.

`3:` Aus `2`"$\mathsf{ab2}(x) \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: $\mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

Beweis **96-22** `d)` `VS` gleich $x \notin \mathbb{A}$.

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$" und
aus `VS` gleich "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **94-12**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

`f)`

`1:` Via **94-1** gilt: $\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`"$\mathcal{U} \notin \mathbb{A}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{ab2}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$.

`e)`

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{ab2}(x)$ Zahl.

`4:` Aus `3`
folgt: $(\mathsf{ab2}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via des bereits bewiesenen `d)`: $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`
folgt: $(\mathsf{ab2}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{ab2}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

Beweis **96-22** `b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-21**: $(x, (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \in \mathsf{ab2}$.

`3:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$.

`4:` Aus `3`“$\mathsf{ab2} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$”
folgt via **21-1(Def)**: $\mathsf{ab2}$ Funktion.

`5:` Aus `4`“$\mathsf{ab2}$ Funktion” und
aus `2`“$(x, (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)) \in \mathsf{ab2}$”
folgt via **18-20**: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via des bereits bewiesenen `c)`: $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3:`

$$\begin{aligned} &\mathsf{ab2}(x) \\ &\stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \\ &\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \\ &\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x) \\ &\stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x). \end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{ab2}(x) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}x)$.

□

AAIV: Arithmetisches Axiom IV. Es werden Rechenregeln, die zwischen Re, Im und $\mathbb{A}$, $\mathbb{T}$, A, M, mns, rez gültig sind, in die Essays eingebracht. Interessanter Weise stellt sich bald heraus, dass `abe)` verschärft werden können und dass die Folgerungen von `cdfg)` voraussetzungsfrei gültig sind:

AAIV: Arithmetisches Axiom IV

`a)` Aus "$a \in \mathbb{T}$" und "$b \in \mathbb{T}$"
folgt "$\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a$" und "$\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b$" .

`b)` Aus "x Zahl" folgt "$x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$" .

`c)` Aus "x Zahl" folgt "$\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$" und "$\mathsf{Im}(-x) = -\mathsf{Im}x$" .

`d)` Aus "x Zahl" folgt "$\mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$"
und "$\mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x)) = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$" .

`e)` Aus "x Zahl" und "y Zahl" und "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$" und "$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$"
folgt "$x = y$" .

`f)` Aus "x Zahl" und "y Zahl" folgt "$\mathsf{Re}(x + y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$"
und "$\mathsf{Im}(x + y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$" .

`g)` Aus "x Zahl" und "y Zahl"
folgt "$\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$"
und "$\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$" .

`REIM.RECH`-**Notation**.

96-23. Nun wird **AAIV**`a)` verschärft:

96-23(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` "$(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$" *oder* "$(a = \mathcal{U}) \wedge (b = \mathcal{U})$".

`ii)` "$\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a$" *und* "$\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-23** $\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $((a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})) \vee ((a = \mathcal{U}) \wedge (b = \mathcal{U}))$.

`1:` Nach `VS` gilt: $((a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})) \vee ((a = \mathcal{U}) \wedge (b = \mathcal{U}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

Aus `1.1.Fall`"$a \in \mathbb{T} \ldots$" und
aus `1.1.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $(\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a) \wedge (\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b)$.

`1.2.Fall` $(a = \mathcal{U}) \wedge (b = \mathcal{U})$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $a = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`
folgt: $b = \mathcal{U}$.

`3.1:` $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}(\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot b) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.1}{=} a$.

`3.2:` $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}(\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot b) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} b$.

`4:` Aus `3.1`"$\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = \ldots = a$" und
aus `3.2`"$\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = \ldots = b$"
folgt: $(\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a) \wedge (\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$(\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a) \wedge (\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b)$.

Beweis **96-23** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)=a)\wedge(\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)=b)$.

`1:` Es gilt: $(a\in\mathbb{T})\wedge(b\in\mathbb{T})$ $\vee$ $a\notin\mathbb{T}$ $\vee$ $b\notin\mathbb{T}$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(a\in\mathbb{T})\wedge(b\in\mathbb{T})$.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $((a\in\mathbb{T})\wedge(b\in\mathbb{T}))\vee((a=\mathcal{U})\wedge(b=\mathcal{U}))$.

`1.2.Fall` $a\notin\mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)=a\ldots$" und
aus `1.2.Fall`"$a\notin\mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)\notin\mathbb{T}$.

`3:` Aus **AAII**"$\mathsf{Re}:\mathbb{A}\to\mathbb{T}$" und
aus 2"$\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)\notin\mathbb{T}$"
folgt via **94-12**: $\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)=\mathcal{U}$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)=a\ldots$" und
aus 3"$\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)=\mathcal{U}$"
folgt: $a=\mathcal{U}$.

`4.2:` Aus 3"$\mathsf{Re}(a+\mathsf{i}\cdot b)=\mathcal{U}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)=\mathcal{U}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\ldots\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)=b$" und
aus 4.2"$\mathsf{Im}(a+\mathsf{i}\cdot b)=\mathcal{U}$"
folgt: $b=\mathcal{U}$.

`6:` Aus 4.1"$a=\mathcal{U}$" und
aus 5"$b=\mathcal{U}$"
folgt: $(a=\mathcal{U})\wedge(b=\mathcal{U})$.

`7:` Aus 6
folgt: $((a\in\mathbb{T})\wedge(b\in\mathbb{T}))\vee((a=\mathcal{U})\wedge(b=\mathcal{U}))$.

...

Beweis **96-23** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a) \wedge (\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b)$.

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $b \notin \mathbb{T}$.

`2:` Aus `VS` gleich "... $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b$" und
aus `1.3.Fall` "$b \notin \mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \notin \mathbb{T}$.

`3:` Aus **AAII** "$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$" und
aus `3` "$\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) \notin \mathbb{T}$"
folgt via **94-12**: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = \mathcal{U}$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "... $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = b$" und
aus `3` "$\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = \mathcal{U}$"
folgt: $b = \mathcal{U}$.

`4.2:` Aus `3` "$\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot b) = \mathcal{U}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = \mathcal{U}$.

`5:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = a$ ..." und
aus `4.2` "$\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) = \mathcal{U}$"
folgt: $a = \mathcal{U}$.

`6:` Aus `5` "$a = \mathcal{U}$" und
aus `4.1` "$b = \mathcal{U}$"
folgt: $(a = \mathcal{U}) \wedge (b = \mathcal{U})$.

`7:` Aus `6`
folgt: $((a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})) \vee ((a = \mathcal{U}) \wedge (b = \mathcal{U}))$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:
$((a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})) \vee ((a = \mathcal{U}) \wedge (b = \mathcal{U}))$.

$\square$

96-24. Nun wird **AAIV**`b)` verschärft:

96-24(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` *"x Zahl" oder "$x = \mathcal{U}$".*

`ii)` $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **96-24** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **AAIV**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`1.2.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`2:`
$$x \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathsf{Re}\mathcal{U}) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x).$$

`3:` Aus `2`
folgt: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

Beweis **96-24** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`1`: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall` folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2`: Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3`: $x \stackrel{\text{VS}}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{2}{=} \mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4`: Aus `3` "$x = \ldots = \mathcal{U}$" folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

□

96-25. Die Folgerung von **AAIV**`f)` und Weiteres ist voraussetzungsfrei gültig:

96-25(Satz)

a) $\mathsf{Re}(x+y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

b) $\mathsf{Im}(x+y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$.

c) $x+y = \mathsf{Re}(x+y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x+y)$.

d) $x+y = ((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y))$.

e) $x+y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

f) $x+y = x + ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

g) $x+y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + y$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **96-25** `a)`

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}) \vee x \notin \mathbb{A} \vee y \notin \mathbb{A}$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{A} \ldots$” folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{A}$” folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`3:` Aus `2.1`“x Zahl” und aus `2.2`“y Zahl” folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(x+y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

...

Beweis **96-25** a)

...

Fallunterscheidung

...

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

3:
$$\mathsf{Re}(x+y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + \mathsf{Re}y \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y).$$

4: Aus 3
folgt: $\mathsf{Re}(x+y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

1.3.Fall $y \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.3.Fall "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.3.Fall "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

3:
$$\mathsf{Re}(x+y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathsf{Re}x) + \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y).$$

4: Aus 3
folgt: $\mathsf{Re}(x+y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

Ende Fallunterscheidung In allen Fällen gilt: $\mathsf{Re}(x+y) = (\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)$.

Beweis **96-25** b)

1: Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$
$\vee$
$x \notin \mathbb{A}$
$\vee$
$y \notin \mathbb{A}$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

2.1: Aus 1.1.Fall"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

2.2: Aus 1.1.Fall"$\ldots y \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

3: Aus 2.1"x Zahl" und
aus 2.2"y Zahl"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(x+y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$.

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$.

3:
$$\mathsf{Im}(x+y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + \mathsf{Im}y \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y).$$

4: Aus 3
folgt: $\mathsf{Im}(x+y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$.

...

Beweis **96-25** `b)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}y = \mathcal{U}$.

`3:`
$$\mathsf{Im}(x+y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathsf{Im}x) + \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{Im}(x+y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $\mathsf{Im}(x+y) = (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)$.

Beweis **96-25** c)

1: Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$
$\vee$
$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

2.1: Aus 1.1.Fall"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

2.2: Aus 1.1.Fall"$\ldots y \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

3: Aus 2.1"x Zahl" und
aus 2.2"y Zahl"
folgt via **96-13**: $x + y$ Zahl.

4: Aus 3"$x + y$ Zahl"
folgt via **96-24**: $x + y = \mathsf{Re}(x + y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x + y)$.

1.2.Fall $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

2: Aus 1.2.Fall"$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$"
folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

3: Aus 2"$x + y = \mathcal{U}$"
folgt via **96-24**: $x + y = \mathsf{Re}(x + y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x + y)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$x + y = \mathsf{Re}(x + y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x + y)$.

d)

1: $$x + y$$
$$\overset{\text{c)}}{=} \mathsf{Re}(x + y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x + y)$$
$$\overset{\text{a)}}{=} ((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x + y)$$
$$\overset{\text{b)}}{=} ((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)).$$

2: Aus 1
folgt: $x + y = ((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y))$.

Beweis **96-25** e)

1: Es gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}))$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.1.Fall"$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.1.Fall"$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

3:
$$x + y \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{2.2}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

4: Aus 3 folgt: $x + y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

1.2.Fall $y \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall"$y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall"$y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

3:
$$x + y \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + (\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{2.2}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

4: Aus 3 folgt: $x + y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

...

<u>Beweis **96-25**</u> `e)`

...

$\boxed{\texttt{Fallunterscheidung}}$

...

$\boxed{\texttt{1.3.Fall}}$ $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

`3.1:` Aus `1.3.Fall`“$x \in \mathbb{A} \ldots$”
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`3.2:` Aus `1.3.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`4.1:` Aus `3.1`“x Zahl”
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`4.2:` Aus `3.2`“y Zahl”
folgt via **96-24**: $y = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`5:` $x+y \stackrel{4.1}{=} ((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+y \stackrel{4.2}{=} ((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))$.

`6:` Aus `5`
folgt: $x + y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

$\boxed{\texttt{Ende Fallunterscheidung}}$ In allen Fällen gilt:

$$x + y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) + ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

Beweis **96-25** `f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:
$$x+y=((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y)).$$

`2:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl})\vee(x\notin\mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` x Zahl.

`3:` Aus `2.1.Fall`“x Zahl” folgt via **96-24**: $x=(\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)$.

`4:` Aus `1`“$x+y=((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))$” und aus `3`“$x=(\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)$” folgt: $x+y=x+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))$.

`2.2.Fall` $x\notin\mathbb{A}$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`“$x\notin\mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x=\mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`“$x\notin\mathbb{A}$” folgt via **96-14**: $x+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))=\mathcal{U}$.

`4:`
$$\begin{aligned}
&x+y\\
&\stackrel{1}{=}((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))\\
&\stackrel{3.1}{=}(\mathcal{U}+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=}\mathcal{U}+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=}\mathcal{U}\\
&\stackrel{3.2}{=}x+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y)).
\end{aligned}$$

`5:` Aus `4` folgt: $x+y=x+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$x+y=x+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y)).$$

<u>Beweis</u> **96-25** `g)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:
$$x+y=((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y)).$$

`2:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl})\vee(y\notin\mathbb{A}).$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` y Zahl.

`3:` Aus `2.1.Fall`"y Zahl" folgt via **96-24**: $y=(\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y).$

`4:` Aus `1`"$x+y=((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))$" und aus `3`"$y=(\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y)$" folgt: $x+y=((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+y.$

`2.2.Fall` $y\notin\mathbb{A}.$

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"$y\notin\mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y=\mathcal{U}.$

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$y\notin\mathbb{A}$" folgt via **96-14**: $((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+y=\mathcal{U}.$

`4:`
$$\begin{aligned}x+y &\stackrel{1}{=} ((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+((\mathsf{Re}y)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))\\ &\stackrel{3.1}{=} ((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+(\mathcal{U}+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}y))\\ &\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+\mathcal{U}\\ &\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}\\ &\stackrel{3.2}{=} ((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+y.\end{aligned}$$

`5:` Aus `4` folgt: $x+y=((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+y.$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$x+y=((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))+y.$$

□

96-26. Die Folgerung von **AAIVg)** und Weiteres ist voraussetzungsfrei gültig:

96-26(Satz)

a) $\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

b) $\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

c) $x \cdot y = \mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$.

d) $x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y))$.

e) $x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

f) $x \cdot y = x \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

g) $x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot y$.

REIM.RECH-**Notation**.

Beweis **96-26** a)

1: Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$ $\vee$ $x \notin \mathbb{A}$ $\vee$ $y \notin \mathbb{A}$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

2.1: Aus 1.1.Fall"$x \in \mathbb{A} \ldots$" folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

2.2: Aus 1.1.Fall"$\ldots y \in \mathbb{A}$" folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

3: Aus 2.1"x Zahl" und aus 2.2"y Zahl" folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

...

Beweis **96-26** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3:`

$$\begin{aligned}\mathsf{Re}(x \cdot y) &\stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U}\\ &\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}\\ &\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y))\\ &= \mathcal{U} - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)\\ &\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)\\ &\stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).\end{aligned}$$

`4:` Aus `3` folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

...

Beweis **96-26** `a)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall` "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall` "$y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

`3:`
$$\mathsf{Re}(x \cdot y) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + (-(\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) = \mathcal{U} - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot \mathcal{U} - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y) \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$\mathsf{Re}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y).$$

<u>Beweis **96-26**</u> `b)`

`1:` Es gilt: $$(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}) \vee x \notin \mathbb{A} \vee y \notin \mathbb{A}.$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{A} \ldots$” folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$\ldots y \in \mathbb{A}$” folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`3:` Aus `2.1`“x Zahl” und aus `2.2`“y Zahl” folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3:`
$$\begin{aligned}
&\mathsf{Im}(x \cdot y)\\
&\stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U}\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)\\
&\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)\\
&\stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y).
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3` folgt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

...

Beweis **96-26** `b)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-14**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}y = \mathcal{U}$.

`3:`
$$\begin{aligned}\mathsf{Im}(x \cdot y) &\stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \\ &\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \\ &\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \\ &\stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot \mathcal{U} + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y) \\ &\stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y).\end{aligned}$$

`4:` Aus `3` folgt: $\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:

$$\mathsf{Im}(x \cdot y) = (\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y).$$

Beweis **96-26** `c)`

`1:` Es gilt: $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$
$\vee$
$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`3:` Aus `2.1`"x Zahl" und
aus `2.2`"y Zahl"
folgt via **96-15**: $x \cdot y$ Zahl.

`4:` Aus `3`"$x \cdot y$ Zahl"
folgt via **96-24**: $x \cdot y = \mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$.

`1.2.Fall` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$x \cdot y = \mathcal{U}$"
folgt via **96-24**: $x \cdot y = \mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$x \cdot y = \mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$.

`d)`

`1:`

$$x \cdot y$$
$$\stackrel{\text{c)}}{=} \mathsf{Re}(x \cdot y) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$$
$$\stackrel{\text{a)}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(x \cdot y)$$
$$\stackrel{\text{b)}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)).$$

`2:` Aus `1`
folgt:
$$x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}y) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}y)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}y)).$$

Beweis **96-26** `e)`

`1:` Es gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee ((x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}))$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3:`
$$x \cdot y \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \stackrel{2.2}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`4:` Aus `3` folgt: $x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$y \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

`3:`
$$x \cdot y \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot (\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y) \stackrel{2.2}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`4:` Aus `3` folgt: $x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

...

Beweis **96-26** `e)`

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

`3.1:` Aus `1.3.Fall`"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`3.2:` Aus `1.3.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`4.1:` Aus `3.1`"x Zahl"
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`4.2:` Aus `3.2`"y Zahl"
folgt via **96-24**: $y = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`4:`
$$x \cdot y \stackrel{4.1}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot y \stackrel{4.2}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`5:` Aus `4`
folgt: $x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

Beweis **96-26** `f)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:
$$x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`2:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` x Zahl.

`3:` Aus `2.1.Fall`“x Zahl” folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`4:` Aus `1`“$x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$” und aus `3`“$x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$” folgt: $x \cdot y = x \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`2.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-16**: $x \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) = \mathcal{U}$.

`4:`
$$\begin{aligned} x \cdot y &\overset{1}{=} ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \\ &\overset{3.1}{=} (\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \\ &\overset{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \\ &\overset{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \\ &\overset{3.2}{=} x \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)). \end{aligned}$$

`5:` Aus `4` folgt: $x \cdot y = x \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$x \cdot y = x \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

<u>Beweis</u> **96-26** `g)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `e)` gilt:
$$x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)).$$

`2:` Via **95-6** gilt: $(y \text{ Zahl}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` y Zahl.

`3:` Aus `2.1.Fall`"y Zahl" folgt via **96-24**: $y = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)$.

`4:` Aus `1`"$x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y))$" und aus `3`"$y = (\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)$" folgt: $x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot y$.

`2.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}y = \mathcal{U}$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-16**: $((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot y = \mathcal{U}$.

`4:`
$$\begin{aligned} & x \cdot y \\ \stackrel{1}{=} & ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot ((\mathsf{Re}y) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \\ \stackrel{3.1}{=} & ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot (\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}y)) \\ \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} & ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot \mathcal{U} \\ \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} & \mathcal{U} \\ \stackrel{3.2}{=} & ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot y. \end{aligned}$$

`5:` Aus `4` folgt: $x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$$x \cdot y = ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \cdot y.$$

□

96-27. Die Folgerung von **AAIV**c) und Weiteres ist voraussetzungsfrei gültig:

<u>**96-27(Satz)**</u>

a) $\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$.

b) $\mathsf{Im}(-x) = -\mathsf{Im}x$.

c) $-x = \mathsf{Re}(-x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-x)$.

d) $-x = (-\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$.

e) $-x = -((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

<u>REIM.RECH-**Notation**</u>.

<u>Beweis **96-27**</u> a)

1: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall x Zahl.

Aus 1.1.Fall"x Zahl"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$.

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

3: $\mathsf{Re}(-x) \overset{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \overset{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \overset{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \overset{2.2}{=} -\mathsf{Re}x$.

4: Aus 3
folgt: $\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Re}(-x) = -\mathsf{Re}x$.

Beweis **96-27** `b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(-x) = -\mathsf{Im}x$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$.

`3:` $\mathsf{Im}(-x) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} -\mathsf{Im}x$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{Im}(-x) = -\mathsf{Im}x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Im}(-x) = -\mathsf{Im}x$.

Beweis **96-27** `c)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-11**: $-x$ Zahl.

`3:` Aus `3`“$-x$ Zahl”
folgt via **96-24**: $-x = \mathsf{Re}(-x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-x)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`“$-x = \mathcal{U}$”
folgt via **96-24**: $-x = \mathsf{Re}(-x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$-x = \mathsf{Re}(-x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-x)$.

`d)`

`1:`
$$-x \stackrel{\text{c)}}{=} \mathsf{Re}(-x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-x) \stackrel{\text{a)}}{=} (-\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(-x) \stackrel{\text{b)}}{=} (-\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x).$$

`2:` Aus `1`
folgt: $-x = (-\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (-\mathsf{Im}x)$.

Beweis **96-27** e)

1: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall x Zahl.

2: Aus 1.1.Fall“x Zahl”
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

3: Aus 2“$x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$”
folgt: $-x = -((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

3: $-x \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} -(\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \stackrel{2.2}{=} -((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

4: Aus 3
folgt: $-x = -((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$-x = -((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

□

96-28. Die Folgerung von **AAIV**`d)` und Weiteres ist voraussetzungsfrei gültig:

96-28(Satz)

a) $\mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) = \quad (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

b) $\mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x)) = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

c) $\mathsf{rez}(x) = \mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x))$.

d) $\mathsf{rez}(x) = ((\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x))$.

e) $\mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

f) $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{Re}(\mathsf{ab2}(x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{ab2}(x))$.

g) $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{ab2}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **96-28** a)

1: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall x Zahl.

Aus 1.1.Fall“x Zahl”
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

1.2.Fall $x \notin \mathbb{A}$.

2.1: Aus 1.2.Fall“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$.

2.2: Aus 1.2.Fall“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-22**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

3: $\mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

4: Aus 3
folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) = (\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

Beweis **96-28** `b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x)) = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-12**: $\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-22**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

`3:` $\mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x)) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x)) = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x)) = (-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)$.

Beweis **96-28** `c)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-11**: $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

`3:` Aus 2“$\mathsf{rez}(x)$ Zahl”
folgt via **96-24**: $\mathsf{rez}(x) = \mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x))$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2“$\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$”
folgt via **96-24**: $\mathsf{rez}(x) = \mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{rez}(x) = \mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x))$.

`d)`

`1:`

$$\begin{aligned} &\mathsf{rez}(x) \\ &\overset{\text{c)}}{=} \mathsf{Re}(\mathsf{rez}(x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x)) \\ &\overset{\text{a)}}{=} ((\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{rez}(x)) \\ &\overset{\text{b)}}{=} ((\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x)). \end{aligned}$$

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathsf{rez}(x) = ((\mathsf{Re}x) : \mathsf{ab2}(x)) + \mathsf{i} \cdot ((-\mathsf{Im}x) : \mathsf{ab2}(x))$.

Beweis **96-28** `e)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl” folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`4:` Aus `3`“$x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$” folgt: $\mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-12**: $\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3:` $\mathsf{rez}(x) \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathsf{rez}(\mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathsf{rez}(\mathcal{U}+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x)) \stackrel{2.2}{=} \mathsf{rez}((\mathsf{Re}x)+\mathsf{i}\cdot(\mathsf{Im}x))$.

`4:` Aus `3` folgt: $\mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

<u>Beweis **96-28**</u> `f)`

`1:` Via **96-22** gilt: $(\mathsf{ab2}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1`“$(\mathsf{ab2}(x) \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$”
folgt via **96-24**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{Re}(\mathsf{ab2}(x)) + \mathsf{i} \cdot \mathsf{Im}(\mathsf{ab2}(x))$.

`g)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3:` Aus `2`“$x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$”
folgt: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{ab2}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-22**: $\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}(x) = \mathcal{U}$.

`3:`
$$\mathsf{ab2}(x) \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-22}}{=} \mathsf{ab2}(\mathcal{U}) \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathsf{ab2}(\mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)) \stackrel{2.2}{=} \mathsf{ab2}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)).$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{ab2}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$\mathsf{ab2}(x) = \mathsf{ab2}((\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x))$.

□

96-29. Die nunmehrige Aussage ist eine Folgerung aus **AAII** und **AAIV**:

96-29(Satz)

Aus "$a \in \mathbb{T}$" und "$b \in \mathbb{T}$" folgt "$a + \mathsf{i} \cdot b$ Zahl".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-29** `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \dots$" und
aus `VS` gleich "$\dots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b) \in \mathbb{T}$"
folgt via **ElementAxiom**: $\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b)$ Menge.

`3:` Aus **AAII**"$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$" und
aus `2`"$\mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot b)$ Menge"
folgt via **94-11**: $a + \mathsf{i} \cdot b \in \mathbb{A}$.

`4:` Aus `3`"$a + \mathsf{i} \cdot b \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: $a + \mathsf{i} \cdot b$ Zahl.

$\square$

96-30. Es wird **AAIV**`e)` verschärft:

96-30(Satz)

Es gelte:

→) $\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$.

→) $\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$.

→) x *Zahl.* *oder* y *Zahl.* *oder* $\mathsf{Re}x$ *Menge.* *oder* $\mathsf{Re}y$ *Menge.* *oder* $\mathsf{Im}x$ *Menge.* *oder* $\mathsf{Im}y$ *Menge.*

Dann folgt "$x = y$".

`REIM`-**Notation**.

Beweis **96-30**

`1:` Nach "$\rightarrow$) *oder*" gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (y \text{ Zahl}) \vee(\mathsf{Re}x \text{ Menge}) \vee (\mathsf{Re}y \text{ Menge}) \vee(\mathsf{Im}x \text{ Menge}) \vee (\mathsf{Im}y \text{ Menge})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl" folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x$ Zahl.

`3:` Aus 2"$\mathsf{Re}x$ Zahl" und aus $\rightarrow$) "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$" folgt: $\mathsf{Re}y$ Zahl.

`4:` Aus 3"$\mathsf{Re}y$ Zahl" folgt via **96-9**: y Zahl.

`5:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl", aus 4"y Zahl", aus $\rightarrow$) "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$" und aus $\rightarrow$) "$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$" folgt via **AAIV**: $x = y$.

`1.2.Fall` y Zahl.

`2:` Aus `1.2.Fall`"y Zahl" folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}y$ Zahl.

`3:` Aus $\rightarrow$) "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$" und aus 2"$\mathsf{Re}y$ Zahl" folgt: $\mathsf{Re}x$ Zahl.

`4:` Aus 3"$\mathsf{Re}x$ Zahl" folgt via **96-9**: x Zahl.

`5:` Aus 4"x Zahl", aus `1.2.Fall`"y Zahl", aus $\rightarrow$) "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$" und aus $\rightarrow$) "$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$" folgt via **AAIV**: $x = y$.

...

<u>Beweis **96-30**</u>

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` — $\mathsf{Re}x$ Menge.

`2.1:` Aus `1.3.Fall` "$\mathsf{Re}x$ Menge"
folgt via **96-9**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.3.Fall` "$\mathsf{Re}x$ Menge" und
aus →) "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$"
folgt: $\mathsf{Re}y$ Menge.

`3:` Aus `2.2` "$\mathsf{Re}y$ Menge"
folgt via **96-9**: y Zahl.

`4:` Aus `2.1` "x Zahl",
aus `3` "y Zahl",
aus →) "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$" und
aus →) "$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$"
folgt via **AAIV**: $x = y$.

`1.4.Fall` — $\mathsf{Re}y$ Menge.

`2.1:` Aus `1.4.Fall` "$\mathsf{Re}y$ Menge"
folgt via **96-9**: y Zahl.

`2.2:` Aus →) "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$" und
aus `1.4.Fall` "$\mathsf{Re}y$ Menge"
folgt: $\mathsf{Re}x$ Menge.

`3:` Aus `2.2` "$\mathsf{Re}x$ Menge"
folgt via **96-9**: x Zahl.

`4:` Aus `3` "x Zahl",
aus `2.1` "y Zahl",
aus →) "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$" und
aus →) "$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$"
folgt via **AAIV**: $x = y$.

...

Beweis **96-30**

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.5.Fall` $\mathsf{Im}x$ Menge.

`2.1:` Aus `1.5.Fall`"$\mathsf{Im}x$ Menge"
folgt via **96-9**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.5.Fall`"$\mathsf{Im}x$ Menge" und
aus →) "$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$"
folgt: $\mathsf{Im}y$ Menge.

`3:` Aus `2.2`"$\mathsf{Im}y$ Menge"
folgt via **96-9**: y Zahl.

`4:` Aus `2.1`"x Zahl",
aus `3`"y Zahl",
aus →) "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$" und
aus →) "$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$"
folgt via **AAIV**: $x = y$.

`1.6.Fall` $\mathsf{Im}y$ Menge.

`2.1:` Aus `1.6.Fall`"$\mathsf{Im}y$ Menge"
folgt via **96-9**: y Zahl.

`2.2:` Aus →) "$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$" und
aus `1.6.Fall`"$\mathsf{Im}y$ Menge"
folgt: $\mathsf{Im}x$ Menge.

`3:` Aus `2.2`"$\mathsf{Im}x$ Menge"
folgt via **96-9**: x Zahl.

`4:` Aus `3`"x Zahl",
aus `2.1`"y Zahl",
aus →) "$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}y$" und
aus →) "$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}y$"
folgt via **AAIV**: $x = y$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x = y$.

□

96-31. Das nunmehrige Kriterium für $x = 0$ ist eine Folgerung aus **AAIII** und der verschärften Version **96-30** von **AAIV**`e)`:

96-31(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = 0$.

`ii)` *"*$\mathsf{Re}x = 0$*" und "*$\mathsf{Im}x = 0$*".*

`REIM`-**Notation**.

Beweis **96-31** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = 0$.

`1.1:` $\mathsf{Re}x \overset{\texttt{VS}}{=} \mathsf{Re}0 \overset{\textbf{AAIII}}{=} 0.$

`1.2:` $\mathsf{Im}x \overset{\texttt{VS}}{=} \mathsf{Im}0 \overset{\textbf{AAIII}}{=} 0.$

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x = \ldots = 0$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Im}x = \ldots = 0$"
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)$.

`1.1:` Via **95-5** gilt: 0 Zahl.

`1.2:` Via **AAIII** gilt: $(\mathsf{Re}0 = 0) \wedge (\mathsf{Im}0 = 0)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Re}0 = 0 \ldots$"
folgt: $\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}0$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x = 0$" und
aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}0 = 0$"
folgt: $\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}0$.

`3:` Aus `1.1`"0 Zahl",
aus `2.1`"$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}0$" und
aus `2.2`"$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}0$"
folgt via **96-30**: $x = 0$.

$\square$

96-32. Via Negation folgt aus **96-31** das nunmehrige Kriterium:

96-32(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \neq x$.

`ii)` "$0 \neq \mathsf{Re}x$" *oder* "$0 \neq \mathsf{Im}x$".

`REIM`-**Notation**.

Beweis **96-32**

`1:` Via **96-31** gilt:

$$x = 0 \Leftrightarrow ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0)).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$\neg(x = 0) \Leftrightarrow \neg((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 0).$$

`3:` Aus `2` folgt:

$$0 \neq x \Leftrightarrow (\neg(\mathsf{Re}x = 0)) \vee (\neg(\mathsf{Im}x = 0)).$$

`4:` Aus `3` folgt:

$$0 \neq x \Leftrightarrow (0 \neq \mathsf{Re}x) \vee (0 \neq \mathsf{Im}x).$$

□

96-33. Das nunmehrige Kriterium für $x = \mathsf{i}$ ist eine Folgerung aus **AAIII** und der verschärften Version **96-30** von **AAIV**`e)`:

96-33(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x = \mathsf{i}$.

`ii)` *"*$\mathsf{Re}x = 0$*" und "*$\mathsf{Im}x = 1$*".*

`REIM`-**Notation**.

Beweis **96-33** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $x = \mathsf{i}$.

`1.1:` $\mathsf{Re}x \stackrel{\mathtt{VS}}{=} \mathsf{Re}\mathsf{i} \stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0.$

`1.2:` $\mathsf{Im}x \stackrel{\mathtt{VS}}{=} \mathsf{Im}\mathsf{i} \stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 1.$

`2:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x = \ldots = 0$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Im}x = \ldots = 1$"
folgt: $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 1)$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 1)$.

`1.1:` Via **95-5** gilt: i Zahl.

`1.2:` Via **AAIII** gilt: $(\mathsf{Re}\mathsf{i} = 0) \wedge (\mathsf{Im}\mathsf{i} = 1)$.

`2.1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Re}x = 0 \ldots$" und
aus `1.2`"$\mathsf{Re}\mathsf{i} = 0 \ldots$"
folgt: $\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}\mathsf{i}$.

`2.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots \mathsf{Im}x = 1$" und
aus `1.2`"$\ldots \mathsf{Im}\mathsf{i} = 1$"
folgt: $\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}\mathsf{i}$.

`3:` Aus `1.1`"i Zahl",
aus `2.1`"$\mathsf{Re}x = \mathsf{Re}\mathsf{i}$" und
aus `2.2`"$\mathsf{Im}x = \mathsf{Im}\mathsf{i}$"
folgt via **96-30**: $x = \mathsf{i}$.

□

96-34. Via Negation folgt aus **96-33** das nunmehrige Kriterium:

<u>**96-34(Satz)**</u>

Die Aussagen `i)`, `ii)` *sind äquivalent:*

`i)` $x \neq \mathsf{i}$.

`ii)` *"*$0 \neq \mathsf{Re}x$*" oder "*$\mathsf{Im}x \neq 1$*".*

<u>`REIM`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **96-34**</u>

`1:` Via **96-33** gilt:

$$x = \mathsf{i} \Leftrightarrow ((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 1)).$$

`2:` Aus `1` folgt:

$$\neg(x = \mathsf{i}) \Leftrightarrow \neg((\mathsf{Re}x = 0) \wedge (\mathsf{Im}x = 1).$$

`3:` Aus `2` folgt:

$$x \neq \mathsf{i} \Leftrightarrow (\neg(\mathsf{Re}x = 0)) \vee (\neg(\mathsf{Im}x = 1)).$$

`4:` Aus `3` folgt:

$$x \neq \mathsf{i} \Leftrightarrow (0 \neq \mathsf{Re}x) \vee (\mathsf{Im}x \neq 1).$$

$\square$

96-35. Die nunmehrigen Formeln überraschen wohl nicht wirklich:

96-35(Satz)

a) $0 = 0 + \mathsf{i} \cdot 0$.

b) $\mathsf{i} = 0 + \mathsf{i} \cdot 1$.

c) $\mathcal{U} = \mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot \mathcal{U}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-35**

`REIM`-**Notation**.

`1.1:` Via **95-5** gilt: 0 Zahl.

`1.2:` Via **95-5** gilt: i Zahl.

`2.1:` Aus `1.1`"0 Zahl"
folgt via **96-24**: $0 = (\mathsf{Re}0) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}0)$.

`2.2:` Aus `1.2`"i Zahl"
folgt via **96-24**: $\mathsf{i} = (\mathsf{Rei}) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Imi})$.

`3.1:` $0 \overset{2.1}{=} (\mathsf{Re}0) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}0) \overset{\mathbf{AAIII}}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}0) \overset{\mathbf{AAIII}}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot 0$.

`3.2:` $\mathsf{i} \overset{2.2}{=} (\mathsf{Rei}) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Imi}) \overset{\mathbf{AAIII}}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Imi}) \overset{\mathbf{AAIII}}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot 1$.

`3.3:` $\mathcal{U} \overset{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot \mathcal{U}$.

`4.a):` Aus `3.1`
folgt: $0 = 0 + \mathsf{i} \cdot 0$.

`4.b):` Aus `3.2`
folgt: $\mathsf{i} = 0 + \mathsf{i} \cdot 1$.

`4.c):` Aus `3.3`
folgt: $\mathcal{U} = \mathcal{U} + \mathsf{i} \cdot \mathcal{U}$.

□

AAV: Arithmetisches Axiom V. Nun werden die Grundregeln des Rechnens in $\mathbb{R}$ festgelegt. Die Rechenregel "$x \cdot \mathsf{rez}(x) = 1$" ist - natürlich - nur für reelle $x \neq 0$ gültig:

AAV: Arithmetisches Axiom V

a) Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "$-x \in \mathbb{R}$" .

b) Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "$\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}$" .

c) Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "$0 + x = x$" .

d) Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "$x - x = 0$" .

e) Aus "$x \in \mathbb{R}$" folgt "$1 \cdot x = x$" .

f) Aus "$0 \neq x \in \mathbb{R}$" folgt "$x \cdot \mathsf{rez}(x) = 1$" .

g) Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$x + y \in \mathbb{R}$" .

h) Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$x + y = y + x$" .

i) Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$x \cdot y \in \mathbb{R}$" .

j) Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$x \cdot y = y \cdot x$" .

k) Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" und "$z \in \mathbb{R}$"
folgt "$x + (y + z) = (x + y) + z$" .

l) Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" und "$z \in \mathbb{R}$" folgt "$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

m) Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" und "$z \in \mathbb{R}$"
folgt "$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$" .

RECH-**Notation**.

96-36. Nun werden erste Folgerungen aus **AAV** gezogen:

96-36(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $x \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

a) $0 + x = x + 0 = x$.

b) $x - x = -x + x = 0$.

c) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

RECH-**Notation**.

Beweis **96-36** a)

1.1: Via **AAI** gilt: $0 \in \mathbb{R}$.

1.2: Aus $\rightarrow$)"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $0 + x = x$.

2: Aus 1.1"$0 \in \mathbb{R}$" und
aus $\rightarrow$)"$x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $0 + x = x + 0$.

3: Aus 1.2"$0 + x = x$" und
aus 2"$0 + x = x + 0$"
folgt: $0 + x = x + 0 = x$.

<u>Beweis **96-36**</u> `b)`

`1.1:` Aus →) “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $-x \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus →) “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $x - x = 0$.

`2.1:` Aus →) “$x \in \mathbb{R}$” und
aus `1.1` “$-x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $x + (-x) = (-x) + x$.

`2.2:` Aus `1.2` “$x - x = 0$”
folgt: $x + (-x) = 0$.

`3:` Aus `2.2` “$x + (-x) = 0$” und
aus `2.1` “$x + (-x) = (-x) + x$”
folgt: $(-x) + x = 0$.

`4:` Aus `3`
folgt: $-x + x = 0$.

`5:` Aus `1.2` “$x - x = 0$” und
aus `4` “$-x + x = 0$”
folgt: $x - x = -x + x = 0$.

`c)`

`1.1:` Via **AAI** gilt: $1 \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus →) “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $1 \cdot x = x$.

`2:` Aus `1.1` “$1 \in \mathbb{R}$” und
aus →) “$x \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAV**: $1 \cdot x = x \cdot 1$.

`3:` Aus `1.2` “$1 \cdot x = x$” und
aus `2` “$1 \cdot x = x \cdot 1$”
folgt: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

□

96-37. Nun wird eine weitere Folgerung aus **AAV**, diesmal $\mathsf{rez}(x)$ betreffend, gezogen:

96-37(Satz)

Aus "$0 \neq x \in \mathbb{R}$" *folgt* "$x \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) \cdot x = 1$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-37** `VS` gleich $0 \neq x \in \mathbb{R}$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$0 \neq x \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $x \cdot \mathsf{rez}(x) = 1$.

`2:` Aus `VS` gleich "$\ldots x \in \mathbb{R}$" und
aus `1.1` "$\mathsf{rez}(x) \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $x \cdot \mathsf{rez}(x)x = \mathsf{rez}(x) \cdot x$.

`3:` Aus `1.2` "$x \cdot \mathsf{rez}(x) = 1$" und
aus `2` "$x \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) \cdot x$"
folgt: $x \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) \cdot x = 1$.

$\square$

96-38. Sind x, y reelle Zahlen, so ist auch $x : y$ eine reelle Zahl:

96-38(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" folgt "$x : y \in \mathbb{R}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-38** `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R})$.

`1`: Aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $\mathsf{rez}(y) \in \mathbb{R}$.

`2`: Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `1` "$\mathsf{rez}(y) \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $x \cdot \mathsf{rez}(y) \in \mathbb{R}$.

`3`: Aus `2`
folgt: $x : y \in \mathbb{R}$.

□

96-39. Für reelle x, y, z gibt es ein "rechts-multiplikatives DistributivGesetz":

96-39(Satz)

Aus "$x \in \mathbb{R}$" und "$y \in \mathbb{R}$" und "$z \in \mathbb{R}$" folgt "$(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **96-39** `VS` gleich $(x \in \mathbb{R}) \wedge (y \in \mathbb{R}) \wedge (z \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $x + y \in \mathbb{R}$.

`2:` Aus `1`"$x + y \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $(x+y) \cdot z = z \cdot (x+y)$.

`3:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{R}$",
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $z \cdot (x+y) = z \cdot x + z \cdot y$.

`4.1:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$x \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $z \cdot x = x \cdot z$.

`4.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots z \in \mathbb{R}$" und
aus `VS` gleich "$\ldots y \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $z \cdot y = y \cdot z$.

`5:` $$(x+y) \cdot z \stackrel{2}{=} z \cdot (x+y) \stackrel{3}{=} z \cdot x + z \cdot y \stackrel{4.1}{=} x \cdot z + z \cdot y \stackrel{4.2}{=} x \cdot z + y \cdot z.$$

`6:` Aus `5`
folgt: $(x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

$\square$

AAVI: Arithmetisches Axiom VI.

Ersterstellung: 02/02/06 **Letzte Änderung: 20/01/12**

AAVI: Arithmetisches Axiom VI. In **AAV** werden die Grundlagen des Rechnens in $\mathbb{R}$ gelegt. Nun werden die Grundrechenarten auf $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty$ ausgedehnt. Unter all den hier in die Essays eingeführten Konventionen ist vermutlich “$\mathsf{rez}(0) = 0$” die am meiste gewöhnungsbedürftige:

AAVI: Arithmetisches Axiom VI

a) Aus “$a \in \mathbb{T}$” folgt “$\mathsf{nan} + a = a + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$” .

b) Aus “$a \in \mathbb{R}$” folgt “$(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$” .

c) Aus “$a \in \mathbb{R}$” folgt “$(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$” .

d) $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

e) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

f) $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = \mathsf{nan}$.

g) Aus “$0 \neq a \in \mathbb{T}$” folgt “$\mathsf{nan} \cdot a = a \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

h) $\mathsf{nan} \cdot 0 = 0 \cdot \mathsf{nan} = 0$.

i) $(+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = 0$.

j) $(-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0$.

k) $(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$.

l) $(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$.

m) $-\mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

n) $-(+\infty) = -\infty$.

o) $-(-\infty) = +\infty$.

p) $\mathsf{rez}(\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

q) $\mathsf{rez}(0) = \mathsf{rez}(+\infty) = \mathsf{rez}(-\infty) = 0$.

RECH-**Notation**.

97-1. Es werden drei Formeln, die ohne viel Aufwand aus **AAVI** folgen, angegeben:

97-1(Satz)

a) $\mathsf{nan}+\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$.

b) $\mathsf{nan}+(+\infty)=(+\infty)+\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$.

c) $\mathsf{nan}+(-\infty)=(-\infty)+\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$.

RECH-**Notation**.

Beweis **97-1** a)

Aus **95-12**"$\mathsf{nan}\in\mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan}+\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$.

b)

Aus **95-12**"$+\infty\in\mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan}+(+\infty)=(+\infty)+\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$.

c)

Aus **95-12**"$-\infty\in\mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan}+(-\infty)=(-\infty)+\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$.

□

97-2. Die Summe von Elementen aus $\mathbb{S}$ ist in $\mathbb{T}$ und die Summe von Elementen aus $\mathbb{T}$ ist auch in $\mathbb{T}$:

97-2(Satz)

a) *Aus "$a \in \mathbb{S}$" und "$b \in \mathbb{S}$" folgt "$a + b \in \mathbb{T}$".*

b) *Aus "$a \in \mathbb{T}$" und "$b \in \mathbb{T}$" folgt "$a + b \in \mathbb{T}$".*

Beweis **97-2** `a)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(a \in \mathbb{R}) \vee (a = +\infty) \vee (a = -\infty)$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(b \in \mathbb{R}) \vee (b = +\infty) \vee (b = -\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$\begin{aligned} & (a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \\ \vee\quad & (a \in \mathbb{R}) \wedge (b = +\infty) \\ \vee\quad & (a \in \mathbb{R}) \wedge (b = -\infty) \\ \vee\quad & (a = +\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \\ \vee\quad & (a = +\infty) \wedge (b = +\infty) \\ \vee\quad & (a = +\infty) \wedge (b = -\infty) \\ \vee\quad & (a = -\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \\ \vee\quad & (a = -\infty) \wedge (b = +\infty) \\ \vee\quad & (a = -\infty) \wedge (b = -\infty). \end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`4:` Aus `3.1.Fall` "$(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$"
folgt via **AAV**: $a + b \in \mathbb{R}$.

`5:` Aus `4` "$a + b \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-16**: $a + b \in \mathbb{T}$.

...

<u>Beweis **97-2**</u> `a)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.2.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = +\infty)$.

`4:` Aus `3.2.Fall`“$a \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **AAVI**: $a + (+\infty) = +\infty$.

`5:` Aus `4`“$a + (+\infty) = +\infty$” und
aus **95-12**“$+\infty \in \mathbb{T}$”
folgt: $a + (+\infty) \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `5`“$a + (+\infty) \in \mathbb{T}$” und
aus `3.2.Fall`“$\ldots b = +\infty$”
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

`3.3.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = -\infty)$.

`4:` Aus `3.3.Fall`“$a \in \mathbb{R} \ldots$”
folgt via **AAVI**: $a + (-\infty) = -\infty$.

`5:` Aus `4`“$a + (-\infty) = -\infty$” und
aus **95-12**“$-\infty \in \mathbb{T}$”
folgt: $a + (-\infty) \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `5`“$a + (-\infty) \in \mathbb{T}$” und
aus `3.3.Fall`“$\ldots b = -\infty$”
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

`3.4.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`4:` Aus `3.4.Fall`“$\ldots b \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + b = +\infty$.

`5:` Aus `4`“$(+\infty) + b = +\infty$” und
aus **95-12**“$+\infty \in \mathbb{T}$”
folgt: $(+\infty) + b \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `3.4.Fall`“$a = +\infty \ldots$” und
aus `5`“$(+\infty) + b \in \mathbb{T}$”
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

...

<u>Beweis **97-2**</u> `a)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.5.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b = +\infty)$.

`4:` Via **AAVI** gilt: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

`5:` Aus `4`"$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$" und
aus **95-12**"$+\infty \in \mathbb{T}$"
folgt: $(+\infty) + (+\infty) \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `3.5.Fall`"$a = +\infty \ldots$" und
aus `5`"$(+\infty) + (+\infty) \in \mathbb{T}$"
folgt: $a + (+\infty) \in \mathbb{T}$.

`7:` Aus `6`"$a + (+\infty) \in \mathbb{T}$" und
aus `3.5.Fall`"$\ldots b = +\infty$"
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

`3.6.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b = -\infty)$.

`4:` Aus **AAVI**"$(+\infty) + (-\infty) = \mathsf{nan}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt: $(+\infty) + (-\infty) \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `3.6.Fall`"$a = +\infty \ldots$" und
aus `4`"$(+\infty) + (-\infty) \in \mathbb{T}$"
folgt: $a + (-\infty) \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `5`"$a + (-\infty) \in \mathbb{T}$" und
aus `3.6.Fall`"$\ldots b = -\infty$"
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

`3.7.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`4:` Aus `3.7.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + b = -\infty$.

`5:` Aus `4`"$(-\infty) + b = -\infty$" und
aus **95-12**"$-\infty \in \mathbb{T}$"
folgt: $(-\infty) + b \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus `3.7.Fall`"$a = -\infty \ldots$" und
aus `5`"$(-\infty) + b \in \mathbb{T}$"
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **97-2** `a)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.8.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = +\infty)$.

`4:` Aus **AAVI**"$(-\infty) + (+\infty) = \mathsf{nan}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt: $(-\infty) + (+\infty) \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `3.8.Fall`"$a = -\infty \ldots$" und
aus 4"$(-\infty) + (+\infty) \in \mathbb{T}$"
folgt: $a + (+\infty) \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus 5"$a + (+\infty) \in \mathbb{T}$" und
aus `3.8.Fall`"$\ldots b = +\infty$"
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

`3.9.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = -\infty)$.

`4:` Aus **AAVI**"$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$" und
aus **95-12**"$-\infty \in \mathbb{T}$"
folgt: $(-\infty) + (-\infty) \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `3.9.Fall`"$a = -\infty \ldots$" und
aus 4"$(-\infty) + (-\infty) \in \mathbb{T}$"
folgt: $a + (-\infty) \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus 5"$a + (-\infty) \in \mathbb{T}$" und
aus `3.9.Fall`"$\ldots b = -\infty$"
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a + b \in \mathbb{T}$.

<u>Beweis</u> **97-2** `b)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **95-16**: $(a \in \mathbb{S}) \vee (a = \mathsf{nan})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(b \in \mathbb{S}) \vee (b = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (a \in \mathbb{S}) \wedge (b = \mathsf{nan})$$
$$\vee \quad (a = \mathsf{nan}) \wedge (b \in \mathbb{S})$$
$$\vee \quad (a = \mathsf{nan}) \wedge (b = \mathsf{nan}).$$

`Fallunterscheidung`

`3.1.Fall` $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S})$.

Aus `3.1.Fall`"$(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S})$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $a + b \in \mathbb{T}$.

`3.2.Fall` $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b = \mathsf{nan})$.

`4:` Aus `3.2.Fall`"$a \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-16**: $a \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4`"$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $a + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus `5`"$a + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt: $a + \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`7:` Aus `6`"$a + \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus `3.2.Fall`"$\ldots b = \mathsf{nan}$"
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

...

Beweis **97-2** `b) VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`3.3.Fall` $(a = \mathsf{nan}) \wedge (b \in \mathbb{S})$.

`4:` Aus `3.3.Fall` "... $b \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-16**: $b \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus 4 "$b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + b = \mathsf{nan}$.

`6:` Aus 5 "$\mathsf{nan} + b = \mathsf{nan}$" und
aus **95-12** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{nan} + b \in \mathbb{T}$.

`7:` Aus `3.3.Fall` "$a = \mathsf{nan}$ ..." und
aus 6 "$\mathsf{nan} + b \in \mathbb{T}$"
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

`3.4.Fall` $(a = \mathsf{nan}) \wedge (b = \mathsf{nan})$.

`4:` Aus **97-1** "$\mathsf{nan} + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$" und
aus **95-12** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{nan} + \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `3.4.Fall` "$a = \mathsf{nan}$ ..." und
aus 4 "$\mathsf{nan} + \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt: $a + \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

`6:` Aus 5 "$a + \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus `3.4.Fall` "... $b = \mathsf{nan}$"
folgt: $a + b \in \mathbb{T}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a + b \in \mathbb{T}$.

□

97-3. Es wird eine Übersicht über die Resultate gegeben, wenn eine reelle Zahl mit $+\infty$ oder $-\infty$ "additiv verknüpft" wird. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - e) - b) - c) - d) - f) - g) - h)`:

97-3(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $a \in \mathbb{R}$.

Dann folgt:

`a)` $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$.

`b)` $-(+\infty) + a = a - (+\infty) = -\infty$.

`c)` $(+\infty) - a = -a + (+\infty) = +\infty$.

`d)` $-(+\infty) - a = -a - (+\infty) = -\infty$.

`e)` $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$.

`f)` $-(-\infty) + a = a - (-\infty) = +\infty$.

`g)` $(-\infty) - a = -a + (-\infty) = -\infty$.

`h)` $-(-\infty) - a = -a - (-\infty) = +\infty$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **97-3** `a)`

Aus $\rightarrow$) "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + a = a + (+\infty) = +\infty$.

`e)`

Aus $\rightarrow$) "$\ldots a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + a = a + (-\infty) = -\infty$.

Beweis **97-3** `b)`

`1:` Via **AAVI** gilt: $-(+\infty) = -\infty$.

`2.1:` Aus →) "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(-\infty) + a = -\infty$.

`2.2:` Aus →) "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $a + (-\infty) = -\infty$.

`3.1:` $-(+\infty) + a \stackrel{1}{=} (-\infty) + a \stackrel{2.1}{=} -\infty$.

`3.2:` $a - (+\infty) = a + (-(+\infty)) \stackrel{1}{=} a + (-\infty) \stackrel{2.2}{=} -\infty$.

`4:` Aus `3.1` "$-(+\infty) + a = \ldots = -\infty$" und
aus `3.2` "$a - (+\infty) = \ldots = -\infty$"
folgt: $-(+\infty) + a = a - (+\infty) = -\infty$.

`c)`

`1:` Aus →) "$a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $-a \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1` "$-a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(+\infty) + (-a) = +\infty$.

`2.2:` Aus `1` "$-a \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-a + (+\infty) = +\infty$.

`3:` $(+\infty) - a = (+\infty) + (-a) \stackrel{2.1}{=} +\infty$.

`4:` Aus `3` "$(+\infty) - a = \ldots = +\infty$" und
aus `2.2` "$-a + (+\infty) = +\infty$"
folgt: $(+\infty) - a = -a + (+\infty) = +\infty$.

Beweis **97-3** `d)`

`1.1:` Via **AAVI** gilt: $-(+\infty)=-\infty.$

`1.2:` Aus $\rightarrow)$ "$a\in\mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $-a\in\mathbb{R}.$

`2.1:` Aus `1.2`"$-a\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(-\infty)+(-a)=-\infty.$

`2.2:` Aus `1.2`"$-a\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $-a+(-\infty)=-\infty.$

`3.1:` $-(+\infty)-a\stackrel{1.1}{=}(-\infty)-a=(-\infty)+(-a)\stackrel{2.1}{=}-\infty.$

`3.2:` $-a-(+\infty)=-a+(-(+\infty))\stackrel{1.1}{=}-a+(-\infty)\stackrel{2.2}{=}-\infty.$

`4:` Aus `3.1`"$-(+\infty)-a=\ldots=-\infty$" und
aus `3.2`"$-a-(+\infty)=\ldots=-\infty$"
folgt: $-(+\infty)-a=-a-(+\infty)=-\infty.$

`f)`

`1:` Via **AAVI** gilt: $-(-\infty)=+\infty.$

`2.1:` Aus $\rightarrow)$ "$a\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(+\infty)+a=+\infty.$

`2.2:` Aus $\rightarrow)$ "$a\in\mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $a+(+\infty)=+\infty.$

`3.1:` $-(-\infty)+a\stackrel{1}{=}(+\infty)+a\stackrel{2.1}{=}+\infty.$

`3.2:` $a-(-\infty)=a+(-(-\infty))\stackrel{1}{=}a+(+\infty)\stackrel{2.2}{=}+\infty.$

`4:` Aus `3.1`"$-(-\infty)+a=\ldots=+\infty$" und
aus `3.2`"$a-(-\infty)=\ldots=+\infty$"
folgt: $-(-\infty)+a=a-(-\infty)=+\infty.$

Beweis **97-3** `g)`

`1:` Aus →) “ $a \in \mathbb{R}$ ”
folgt via **AAV**: $-a \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1` “ $-a \in \mathbb{R}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $(-\infty) + (-a) = -\infty$.

`2.2:` Aus `1` “ $-a \in \mathbb{R}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `e)`: $-a + (-\infty) = -\infty$.

`3:` $(-\infty) - a = (-\infty) + (-a) \stackrel{2.1}{=} -\infty$.

`4:` Aus `3` “ $(-\infty) - a = \ldots = -\infty$ ” und
aus `2.2` “ $-a + (-\infty) = -\infty$ ”
folgt: $(-\infty) - a = -a + (-\infty) = -\infty$.

`h)`

`1.1:` Via **AAVI** gilt: $-(-\infty) = +\infty$.

`1.2:` Aus →) “ $a \in \mathbb{R}$ ”
folgt via **AAV**: $-a \in \mathbb{R}$.

`2.1:` Aus `1.2` “ $-a \in \mathbb{R}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $(+\infty) + (-a) = +\infty$.

`2.2:` Aus `1.2` “ $-a \in \mathbb{R}$ ”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $-a + (+\infty) = +\infty$.

`3.1:` $-(-\infty) - a \stackrel{1.1}{=} (+\infty) - a = (+\infty) + (-a) \stackrel{2.1}{=} +\infty$.

`3.2:` $-a - (-\infty) = -a + (-(-\infty)) \stackrel{1.1}{=} -a + (+\infty) \stackrel{2.2}{=} +\infty$.

`4:` Aus `3.1` “ $-(-\infty) - a = \ldots = +\infty$ ” und
aus `3.2` “ $-a - (-\infty) = \ldots = +\infty$ ”
folgt: $-(-\infty) - a = -a - (-\infty) = +\infty$.

$\square$

97-4. Es wird ein Überblick über die Resultate "additiver Verknüpfungen" von $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty$ gegeben:

97-4(Satz)

a) $\mathsf{nan} - \mathsf{nan} = -\mathsf{nan} + \mathsf{nan} = -\mathsf{nan} - \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

b) $\mathsf{nan} - (+\infty) = -\mathsf{nan} + (+\infty) = -\mathsf{nan} - (+\infty) = \mathsf{nan}$.

c) $\mathsf{nan} - (-\infty) = -\mathsf{nan} + (-\infty) = -\mathsf{nan} - (-\infty) = \mathsf{nan}$.

d) $(+\infty) - \mathsf{nan} = -(+\infty) + \mathsf{nan} = -(+\infty) - \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

e) $(+\infty) - (+\infty) = -(+\infty) + (+\infty) = \mathsf{nan}$.

f) $-(+\infty) - (+\infty) = -\infty$.

g) $(+\infty) - (-\infty) = +\infty$.

h) $-(+\infty) + (-\infty) = -\infty$.

i) $-(+\infty) - (-\infty) = \mathsf{nan}$.

j) $(-\infty) - \mathsf{nan} = -(-\infty) + \mathsf{nan} = -(-\infty) - \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

k) $(-\infty) - (+\infty) = -\infty$.

l) $-(-\infty) + (+\infty) = +\infty$.

m) $-(-\infty) - (+\infty) = \mathsf{nan}$.

n) $(-\infty) - (-\infty) = -(-\infty) + (-\infty) = \mathsf{nan}$.

o) $-(-\infty) - (-\infty) = +\infty$.

`RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **97-4**</u> `a)`

`1.1:` $$\mathsf{nan}-\mathsf{nan}=\mathsf{nan}+(-\mathsf{nan})\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}+\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`1.2:` $$-\mathsf{nan}+\mathsf{nan}=(-\mathsf{nan})+\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}+\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`1.3:` $$-\mathsf{nan}-\mathsf{nan}=(-\mathsf{nan})+(-\mathsf{nan})\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}+\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{nan}-\mathsf{nan}=\ldots=\mathsf{nan}$”,
aus `1.2`“$-\mathsf{nan}+\mathsf{nan}=\ldots=\mathsf{nan}$” und
aus `1.3`“$-\mathsf{nan}-\mathsf{nan}=\ldots=\mathsf{nan}$”
folgt: $$\mathsf{nan}-\mathsf{nan}=-\mathsf{nan}+\mathsf{nan}=-\mathsf{nan}-\mathsf{nan}=\mathsf{nan}.$$

`b)`

`1.1:` $$\mathsf{nan}-(+\infty)=\mathsf{nan}+(-(+\infty))\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}+(-\infty)\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`1.2:` $$-\mathsf{nan}+(+\infty)=(-\mathsf{nan})+(+\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}+(+\infty)\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`1.3:` $$\begin{aligned}&-\mathsf{nan}-(+\infty)\\&=-\mathsf{nan}+(-(+\infty))\\&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}-\mathsf{nan}+(-\infty)\\&=(-\mathsf{nan})+(-\infty)\\&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}+(-\infty)\\&\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.\end{aligned}$$

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{nan}-(+\infty)=\ldots=\mathsf{nan}$”,
aus `1.2`“$-\mathsf{nan}+(+\infty)=\ldots=\mathsf{nan}$” und
aus `1.3`“$-\mathsf{nan}-(+\infty)=\ldots=\mathsf{nan}$”
folgt: $$\mathsf{nan}-(+\infty)=-\mathsf{nan}+(+\infty)=-\mathsf{nan}-(+\infty)=\mathsf{nan}.$$

<u>Beweis **97-4**</u> `c)`

`1.1:` $$\mathsf{nan}-(-\infty)=\mathsf{nan}+(-(-\infty))\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}+(+\infty)\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`1.2:` $$-\mathsf{nan}+(-\infty)=(-\mathsf{nan})+(-\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}+(-\infty)\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`1.3:` $$-\mathsf{nan}-(-\infty)$$
$$=-\mathsf{nan}+(-(-\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}-\mathsf{nan}+(+\infty)$$
$$=(-\mathsf{nan})+(+\infty)$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}+(+\infty)$$
$$\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{nan}-(-\infty)=\ldots=\mathsf{nan}$”,
aus `1.2`“$-\mathsf{nan}+(-\infty)=\ldots=\mathsf{nan}$” und
aus `1.3`“$-\mathsf{nan}-(-\infty)=\ldots=\mathsf{nan}$”
folgt: $$\mathsf{nan}-(-\infty)=-\mathsf{nan}+(-\infty)=-\mathsf{nan}-(-\infty)=\mathsf{nan}.$$

`d)`

`1.1:` $$(+\infty)-\mathsf{nan}=(+\infty)+(-\mathsf{nan})\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(+\infty)+\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`1.2:` $$-(+\infty)+\mathsf{nan}=(-(+\infty))+\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(-\infty)+\mathsf{nan}\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`1.3:` $$-(+\infty)-\mathsf{nan}$$
$$=(-(+\infty))-\mathsf{nan}$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(-\infty)-\mathsf{nan}$$
$$=(-\infty)+(-\mathsf{nan})$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(-\infty)+\mathsf{nan}$$
$$\stackrel{\mathbf{97-1}}{=}\mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1.1`“$(+\infty)-\mathsf{nan}=\ldots=\mathsf{nan}$”,
aus `1.2`“$-(+\infty)+\mathsf{nan}=\ldots=\mathsf{nan}$” und
aus `1.3`“$-(+\infty)-\mathsf{nan}=\ldots=\mathsf{nan}$”
folgt: $$(+\infty)-\mathsf{nan}=-(+\infty)+\mathsf{nan}=-(+\infty)-\mathsf{nan}=\mathsf{nan}.$$

Beweis **97-4** `e)`

`1.1:` $$(+\infty)-(+\infty)=(+\infty)+(-(+\infty))\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(+\infty)+(-\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}.$$

`1.2:` $$-(+\infty)+(+\infty)=(-(+\infty))+(+\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(-\infty)+(+\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1.1` “$(+\infty)-(+\infty)=\ldots=\mathsf{nan}$” und
aus `1.2` “$-(+\infty)+(+\infty)=\ldots=\mathsf{nan}$”
folgt: $$(+\infty)-(+\infty)=-(+\infty)+(+\infty)=\mathsf{nan}.$$

`f)`

`1:` $$-(+\infty)-(+\infty)=(-(+\infty))+(-(+\infty))\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(-\infty)+(-\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}-\infty.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-(+\infty)-(+\infty)=-\infty.$$

`g)`

`1:` $$(+\infty)-(-\infty)=(+\infty)+(-(-\infty))\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(+\infty)+(+\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}+\infty.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(+\infty)-(-\infty)=+\infty.$$

`h)`

`1:` $$-(+\infty)+(-\infty)=(-(+\infty))+(-\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(-\infty)+(-\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}-\infty.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-(+\infty)+(-\infty)=-\infty.$$

`i)`

`1:` $$\begin{aligned}&-(+\infty)-(-\infty)\\&=(-(+\infty))+(-(-\infty))\\&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(-\infty)+(-(-\infty))\\&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(-\infty)+(+\infty)\\&\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}.\end{aligned}$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-(+\infty)-(-\infty)=\mathsf{nan}.$$

<u>Beweis</u> **97-4** `j)`

`1.1:` $$(-\infty) - \mathsf{nan} = (-\infty) + (-\mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}.$$

`1.2:` $$-(-\infty) + \mathsf{nan} = (-(-\infty)) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}.$$

`1.3:` $$-(-\infty) - \mathsf{nan}$$
$$= (-(-\infty)) - \mathsf{nan}$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) - \mathsf{nan}$$
$$= (+\infty) + (-\mathsf{nan})$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + \mathsf{nan}$$
$$\stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1.1`“$(-\infty) - \mathsf{nan} = \ldots = \mathsf{nan}$”,
aus `1.2`“$-(-\infty) + \mathsf{nan} = \ldots = \mathsf{nan}$” und
aus `1.3`“$-(-\infty) - \mathsf{nan} = \ldots = \mathsf{nan}$”
folgt: $$(-\infty) - \mathsf{nan} = -(-\infty) + \mathsf{nan} = -(-\infty) - \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$$

`k)`

`1:` $$(-\infty) - (+\infty) = (-\infty) + (-(+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) + (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} -\infty.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$(-\infty) - (+\infty) = -\infty.$$

`l)`

`1:` $$-(-\infty) + (+\infty) = (-(-\infty)) + (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-(-\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

`m)`

`1:` $$-(-\infty) - (+\infty)$$
$$= (-(-\infty)) + (-(+\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (-(+\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (-\infty)$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-(-\infty) - (+\infty) = \mathsf{nan}.$$

Beweis **97-4** `n)`

`1.1:` $$(-\infty)-(-\infty)=(-\infty)+(-(-\infty))\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(-\infty)+(+\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}.$$

`1.2:` $$-(-\infty)+(-\infty)=(-(-\infty))+(-\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(+\infty)+(-\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}\mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1.1` "$(-\infty)-(-\infty)=\ldots=\mathsf{nan}$" und
aus `1.2` "$-(-\infty)+(-\infty)=\ldots=\mathsf{nan}$"
folgt: $$(-\infty)-(-\infty)=-(-\infty)+(-\infty)=\mathsf{nan}.$$

`o)`

`1:` $$-(-\infty)-(-\infty)=(-(-\infty))+(-(-\infty))\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}(+\infty)+(+\infty)\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=}+\infty.$$

`2:` Aus `1`
folgt: $$-(-\infty)-(-\infty)=+\infty.$$

□

97-5. Nun werden "multiplikative Verknüpfungen" von $\mathsf{nan}, +\infty, -\infty$ angegeben:

97-5(Satz)

a) $\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

b) $\mathsf{nan} \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

c) $\mathsf{nan} \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

d) $\mathsf{nan} : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

e) $\mathsf{nan} : (+\infty) = 0$.

f) $(+\infty) : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

g) $\mathsf{nan} : (-\infty) = 0$.

h) $(-\infty) : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

i) $(+\infty) : (+\infty) = 0$.

j) $(+\infty) : (-\infty) = 0$.

k) $(-\infty) : (+\infty) = 0$.

l) $(-\infty) : (-\infty) = 0$.

RECH-**Notation**.

Beweis **97-5** a)

Aus **95-7**"$0 \neq \mathsf{nan}$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

b)

Aus **95-7**"$0 \neq +\infty$" und
aus **95-12**"$+\infty \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

Beweis **97-5** c)

Aus **95-7** "$0 \neq -\infty$" und
aus **95-12** "$-\infty \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

d)

1: $\mathsf{nan} : \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathrm{a)}}{=} \mathsf{nan}$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{nan} : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

e)

1: $\mathsf{nan} : (+\infty) = \mathsf{nan} \cdot \mathsf{rez}(+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \cdot 0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{nan} : (+\infty) = 0$.

f)

1: $(+\infty) : \mathsf{nan} = (+\infty) \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot \mathsf{nan} \stackrel{\mathrm{b)}}{=} \mathsf{nan}$.

2: Aus 1
folgt: $(+\infty) : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

g)

1: $\mathsf{nan} : (-\infty) = \mathsf{nan} \cdot \mathsf{rez}(-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \cdot 0 \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} 0$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{nan} : (-\infty) = 0$.

<u>Beweis</u> **97-5** `h)`

1: $$(-\infty) : \mathsf{nan} = (-\infty) \cdot \mathsf{rez}(\mathsf{nan}) \overset{\textbf{AAVI}}{=} (-\infty) \cdot \mathsf{nan} \overset{\text{c)}}{=} \mathsf{nan}.$$

2: Aus 1 folgt: $$(-\infty) : \mathsf{nan} = \mathsf{nan}.$$

`i)`

1: $$(+\infty) : (+\infty) = (+\infty) \cdot \mathsf{rez}(+\infty) \overset{\textbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot 0 \overset{\textbf{AAVI}}{=} 0.$$

2: Aus 1 folgt: $$(+\infty) : (+\infty) = 0.$$

`j)`

1: $$(+\infty) : (-\infty) = (+\infty) \cdot \mathsf{rez}(-\infty) \overset{\textbf{AAVI}}{=} (+\infty) \cdot 0 \overset{\textbf{AAVI}}{=} 0.$$

2: Aus 1 folgt: $$(+\infty) : (-\infty) = 0.$$

`k)`

1: $$(-\infty) : (+\infty) = (-\infty) \cdot \mathsf{rez}(+\infty) \overset{\textbf{AAVI}}{=} (-\infty) \cdot 0 \overset{\textbf{AAVI}}{=} 0.$$

2: Aus 1 folgt: $$(-\infty) : (+\infty) = 0.$$

`l)`

1: $$(-\infty) : (-\infty) = (-\infty) \cdot \mathsf{rez}(-\infty) \overset{\textbf{AAVI}}{=} (-\infty) \cdot 0 \overset{\textbf{AAVI}}{=} 0.$$

2: Aus 1 folgt: $$(-\infty) : (-\infty) = 0.$$

□

FSA: FundamentalSatz Addition.
FSA0: FundamentalSatz Addition0.
FSM0: FundamentalSatz Multiplikation0.
FSD0: FundamentalSatz Division0.

Ersterstellung: 02/02/06 **Letzte Änderung: 23/01/12**

98-1. Der Beweis des ersten *Hilfs*-Satzes auf dem Weg zum FundamentalSatz Addition erfordert eine bislang ungeahnte Fülle an Fallunterscheidungen:

"Aus … "$a \in \mathbb{R}$" und aus **95-12**"$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$" folgt … $a \in \mathbb{T}$" :

98-1(Satz)

Aus "$a \in \mathbb{S}$" und "$b \in \mathbb{S}$" und "$c \in \mathbb{S}$" folgt "$a + (b + c) = (a + b) + c$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-1** `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

`1.1:` Aus `1`"$a \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(a \in \mathbb{R}) \vee (a = +\infty) \vee (a = -\infty)$.

`1.2:` Aus `1`"$\ldots b \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **95-15**: $(b \in \mathbb{R}) \vee (b = +\infty) \vee (b = -\infty)$.

`1.3:` Aus `1`"$\ldots c \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-15**: $(c \in \mathbb{R}) \vee (c = +\infty) \vee (c = -\infty)$.

…

<u>Beweis **98-1**</u> `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt:

$$
\begin{array}{r}
(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = +\infty) \\
(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = -\infty) \\
(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = +\infty) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = +\infty) \\
(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = -\infty) \\
(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = -\infty) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = +\infty) \\
(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = -\infty) \\
(a = +\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
(a = +\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = +\infty) \\
(a = +\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = -\infty) \\
(a = +\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
(a = +\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = +\infty) \\
(a = +\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = -\infty) \\
(a = +\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
(a = +\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = +\infty) \\
(a = +\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = -\infty) \\
(a = -\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
(a = -\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = +\infty) \\
(a = -\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = -\infty) \\
(a = -\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
(a = -\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = +\infty) \\
(a = -\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = -\infty) \\
(a = -\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c \in \mathbb{R}) \\
(a = -\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = +\infty) \\
(a = -\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = -\infty).
\end{array}
$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c \in \mathbb{R})$.

Aus `2.1.Fall` “$(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c \in \mathbb{R})$”
folgt via **AAV**: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

<u>Beweis **98-1**</u> `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $c = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.2.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $b + (+\infty) = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.2.Fall`"$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $a + (+\infty) = +\infty$.

`3.4:` Aus `2.2.Fall`"$(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \ldots$"
folgt via **AAV**: $a + b \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3.4`"$a + b \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(a + b) + (+\infty) = +\infty$.

`5:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} a + (b + (+\infty)) \stackrel{3.2}{=} a + (+\infty) \stackrel{3.3}{=} +\infty$
$\stackrel{4}{=} (a + b) + (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (a + b) + c$.

`6:` Aus `5`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

Beweis **98-1** `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.3.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall` folgt: $c = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.3.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $b + (-\infty) = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.3.Fall`"$a \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $a + (-\infty) = -\infty$.

`3.4:` Aus `2.3.Fall`"$(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \ldots$" folgt via **AAV**: $a + b \in \mathbb{R}$.

`4:` Aus `3.4`"$a + b \in \mathbb{R}$" folgt via **AAVI**: $(a + b) + (-\infty) = -\infty$.

`5:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} a + (b + (-\infty)) \stackrel{3.2}{=} a + (-\infty) \stackrel{3.3}{=} -\infty$
$\stackrel{4}{=} (a + b) + (-\infty) \stackrel{3.1}{=} (a + b) + c.$

`6:` Aus `5` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.4.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = +\infty) \wedge (c \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall` folgt: $b = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.4.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$" folgt via **AAVI**: $(+\infty) + c = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.4.Fall`"$a \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $a + (+\infty) = +\infty$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} a + ((+\infty) + c) \stackrel{3.2}{=} a + (+\infty) \stackrel{3.3}{=} +\infty$
$\stackrel{3.2}{=} (+\infty) + c \stackrel{3.3}{=} (a + (+\infty)) + c \stackrel{3.1}{=} (a + b) + c.$

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

<u>Beweis **98-1**</u> `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.5.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.5.Fall` folgt: $b = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.5.Fall` folgt: $c = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.5.Fall`"$a \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $a + (+\infty) = +\infty$.

`4:` $$a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} a + ((+\infty) + c) \stackrel{3.2}{=} a + ((+\infty) + (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} a + (+\infty) \stackrel{3.3}{=} +\infty \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{3.3}{=} (a + (+\infty)) + (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (a + b) + (+\infty) \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c.$$

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.6.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = -\infty)$.

`3:` Aus `2.6.Fall`"$a \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **95-16**: $a \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus `3`"$a \in \mathbb{T}$" folgt via **AAVI**: $a + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4.2:` Aus `2.6.Fall`"$a \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $a + (+\infty) = +\infty$.

`4.3:` Aus `2.6.Fall` folgt: $b = +\infty$.

`4.4:` Aus `2.6.Fall` folgt: $c = -\infty$.

`5:` $$a + (b + c) \stackrel{4.3}{=} a + ((+\infty) + c) \stackrel{4.4}{=} a + ((+\infty) + (-\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} a + \mathsf{nan} \stackrel{4.1}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (-\infty) \stackrel{4.2}{=} (a + (+\infty)) + (-\infty) \stackrel{4.3}{=} (a + b) + (-\infty) \stackrel{4.4}{=} (a + b) + c.$$

`6:` Aus `5` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

<u>Beweis **98-1**</u> `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.7.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = -\infty) \wedge (c \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.7.Fall`
folgt: $b = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.7.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + c = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.7.Fall`"$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $a + (-\infty) = -\infty$.

`6:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} a + ((-\infty) + c) \stackrel{3.2}{=} a + (-\infty) \stackrel{3.3}{=} -\infty \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + c$
$\stackrel{3.3}{=} (a + (-\infty)) + c \stackrel{3.1}{=} (a + b) + c$.

`7:` Aus `6`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.8.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = +\infty)$.

`3:` Aus `2.8.Fall`"$a \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-16**: $a \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $b = -\infty$.

`4.2:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $c = +\infty$.

`4.3:` Aus `3`"$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $a + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4.5:` Aus `2.8.Fall`"$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $a + (-\infty) = -\infty$.

`5:` $a + (b + c) \stackrel{4.1}{=} a + ((-\infty) + c) \stackrel{4.2}{=} a + ((-\infty) + (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} a + \mathsf{nan}$
$\stackrel{4.3}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) + (+\infty) \stackrel{4.5}{=} (a + (-\infty)) + (+\infty)$
$\stackrel{4.1}{=} (a + b) + (+\infty) \stackrel{4.2}{=} (a + b) + c$.

`6:` Aus `5`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

Beweis **98-1** `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.9.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $b = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.9.Fall`
folgt: $c = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.9.Fall`"$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $a + (-\infty) = -\infty$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} a + ((-\infty) + c) \stackrel{3.2}{=} a + ((-\infty) + (-\infty))$
$\stackrel{\textbf{AAVI}}{=} a + (-\infty) \stackrel{3.3}{=} -\infty \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} (-\infty) + (-\infty) \stackrel{3.3}{=} (a + (-\infty)) + (-\infty)$
$\stackrel{3.1}{=} (a + b) + (-\infty) \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c$.

`5:` Aus `4`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.10.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.10.Fall`
folgt: $a = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.10.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.10.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $b + c \in \mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2.10.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + b = +\infty$.

`3.4:` Aus `2.10.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + c = +\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$b + c \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + (b + c) = +\infty$.

`5:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + (b + c) \stackrel{4}{=} +\infty \stackrel{3.4}{=} (+\infty) + c$
$\stackrel{3.3}{=} ((+\infty) + b) + c \stackrel{3.1}{=} (a + b) + c$.

`6:` Aus `5`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

Beweis **98-1** `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.11.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.11.Fall` folgt: $a = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.11.Fall` folgt: $c = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.11.Fall` "$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $b + (+\infty) = +\infty$.

`3.4:` Aus `2.11.Fall` "$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $(+\infty) + b = +\infty$.

`4:` $$a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + (b + (+\infty)) \stackrel{3.3}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{3.4}{=} ((+\infty) + b) + (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (a + b) + (+\infty) \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c.$$

`5:` Aus 4 folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.12.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.12.Fall` folgt: $a = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.12.Fall` folgt: $c = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.12.Fall` "$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $b + (-\infty) = -\infty$.

`3.4:` Aus `2.12.Fall` "$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $(+\infty) + b = +\infty$.

`4:` $$a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + (b + (-\infty)) \stackrel{3.3}{=} (+\infty) + (-\infty) \stackrel{3.4}{=} ((+\infty) + b) + (-\infty) \stackrel{3.1}{=} (a + b) + (-\infty) \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c.$$

`5:` Aus 4 folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

Beweis **98-1** `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.13.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.13.Fall` folgt: $a = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.13.Fall` folgt: $b = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.13.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$" folgt via **AAVI**: $(+\infty) + c = +\infty$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + ((+\infty) + c)$
$\stackrel{3.3}{=} (+\infty) + (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} +\infty \stackrel{3.3}{=} (+\infty) + c \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((+\infty) + (+\infty)) + c$
$\stackrel{3.1}{=} (a + (+\infty)) + c \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c$.

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.14.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.13.Fall` folgt: $a = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.13.Fall` folgt: $b = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.13.Fall` folgt: $c = +\infty$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + ((+\infty) + c)$
$\stackrel{3.3}{=} (+\infty) + ((+\infty) + (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (+\infty)$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((+\infty) + (+\infty)) + (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (a + (+\infty)) + (+\infty)$
$\stackrel{3.2}{=} (a + b) + (+\infty) \stackrel{3.3}{=} (a + b) + c$.

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

Beweis **98-1** `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.15.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.15.Fall` folgt: $a = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.15.Fall` folgt: $b = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.15.Fall` folgt: $c = -\infty$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + ((+\infty) + c)$
$\stackrel{3.3}{=} (+\infty) + ((+\infty) + (-\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$
$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((+\infty) + (+\infty)) + (-\infty)$
$\stackrel{3.1}{=} (a + (+\infty)) + (-\infty) \stackrel{3.2}{=} (a + b) + (-\infty) \stackrel{3.3}{=} (a + b) + c.$

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.16.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus `2.16.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$" folgt via **95-16**: $c \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus `2.16.Fall` folgt: $a = +\infty$.

`4.2:` Aus `2.16.Fall` folgt: $b = -\infty$.

`4.3:` Aus `2.16.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R} \ldots$" folgt via **AAVI**: $(-\infty) + c = -\infty$.

`4.4:` Aus `3`"$c \in \mathbb{T}$" folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + c = \mathsf{nan}$.

`5:` $a + (b + c) \stackrel{4.1}{=} (+\infty) + (b + c) \stackrel{4.2}{=} (+\infty) + ((-\infty) + c)$
$\stackrel{4.3}{=} (+\infty) + (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{4.4}{=} \mathsf{nan} + c \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((+\infty) + (-\infty)) + c$
$\stackrel{4.1}{=} (a + (-\infty)) + c \stackrel{4.2}{=} (a + b) + c.$

`6:` Aus `5` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

Beweis **98-1** VS gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

Fallunterscheidung

...

2.17.Fall $(a = +\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = +\infty)$.

3.1: Aus 2.17.Fall folgt: $a = +\infty$.

3.2: Aus 2.17.Fall folgt: $b = -\infty$.

3.3: Aus 2.17.Fall folgt: $c = +\infty$.

4: $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + ((-\infty) + c)$
$\stackrel{3.3}{=} (+\infty) + ((-\infty) + (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan}$
$\stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} + (+\infty) \stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} + c \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((+\infty) + (-\infty)) + c$
$\stackrel{3.1}{=} (a + (-\infty)) + c \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c$.

5: Aus 4 folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2.18.Fall $(a = +\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = -\infty)$.

3.1: Aus 2.18.Fall folgt: $a = +\infty$.

3.2: Aus 2.18.Fall folgt: $b = -\infty$.

3.3: Aus 2.18.Fall folgt: $c = -\infty$.

4: $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + ((-\infty) + c)$
$\stackrel{3.3}{=} (+\infty) + ((-\infty) + (-\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (-\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan}$
$\stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} + (-\infty) \stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} + c \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((+\infty) + (-\infty)) + c$
$\stackrel{3.1}{=} (a + (-\infty)) + c \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c$.

5: Aus 4 folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

Beweis **98-1** `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.19.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.19.Fall`
folgt: $a = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.19.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$" und
aus `2.19.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $b + c \in \mathbb{R}$.

`3.3:` Aus `2.19.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + b = -\infty$.

`3.4:` Aus `2.19.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + c = -\infty$.

`4:` Aus `3.2`"$b + c \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + (b + c) = -\infty$.

`5:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + (b + c) \stackrel{4}{=} -\infty \stackrel{3.4}{=} (-\infty) + c \stackrel{3.3}{=} ((-\infty) + b) + c$
$\stackrel{3.1}{=} (a + b) + c$.

`6:` Aus `5`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.20.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.20.Fall`
folgt: $a = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.20.Fall`
folgt: $c = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.20.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $b + (+\infty) = +\infty$.

`3.4:` Aus `2.20.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + b = -\infty$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + (b + (+\infty))$
$\stackrel{3.3}{=} (-\infty) + (+\infty) \stackrel{3.4}{=} ((-\infty) + b) + (+\infty) \stackrel{3.1}{=} (a + b) + (+\infty)$
$\stackrel{3.2}{=} (a + b) + c$.

`5:` Aus `4`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

Beweis **98-1** `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.21.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \wedge (c = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.21.Fall`
folgt: $a = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.21.Fall`
folgt: $c = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.21.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $b + (-\infty) = -\infty$.

`3.4:` Aus `2.21.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + b = -\infty$.

`4:` $a + (b + c) \overset{3.1}{=} (-\infty) + (b + c) \overset{3.2}{=} (-\infty) + (b + (-\infty))$
$\overset{3.3}{=} (-\infty) + (-\infty) \overset{3.4}{=} ((-\infty) + b) + (-\infty) \overset{3.1}{=} (a + b) + (-\infty)$
$\overset{3.2}{=} (a + b) + c$.

`5:` Aus `4`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.22.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus `2.22.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-16**: $c \in \mathbb{T}$.

`4.1:` Aus `2.22.Fall`
folgt: $a = -\infty$.

`4.2:` Aus `2.22.Fall`
folgt: $b = +\infty$.

`4.3:` Aus `2.22.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + c = +\infty$.

`4.4:` Aus `3`"$c \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + c = \mathsf{nan}$.

`5:` $a + (b + c) \overset{4.1}{=} (-\infty) + (b + c) \overset{4.2}{=} (-\infty) + ((+\infty) + c)$
$\overset{4.3}{=} (-\infty) + (+\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \overset{4.4}{=} \mathsf{nan} + c \overset{\mathbf{AAVI}}{=} ((-\infty) + (+\infty)) + c$
$\overset{4.1}{=} (a + (+\infty)) + c \overset{4.2}{=} (a + b) + c$.

`6:` Aus `5`
folgt: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

...

<u>Beweis **98-1**</u> `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.23.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.23.Fall` folgt: $a = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.22.Fall` folgt: $b = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.22.Fall` folgt: $c = +\infty$.

`4:` $$a + (b + c) \overset{3.1}{=} (-\infty) + (b + c) \overset{3.2}{=} (-\infty) + ((+\infty) + c) \overset{3.3}{=} (-\infty) + ((+\infty) + (+\infty)) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) + (+\infty) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \overset{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} + (+\infty) \overset{3.3}{=} \mathsf{nan} + c \overset{\mathbf{AAVI}}{=} ((-\infty) + (+\infty)) + c \overset{3.1}{=} (a + (+\infty)) + c \overset{3.2}{=} (a + b) + c.$$

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.24.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = +\infty) \wedge (c = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.24.Fall` folgt: $a = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.24.Fall` folgt: $b = +\infty$.

`3.3:` Aus `2.24.Fall` folgt: $c = -\infty$.

`4:` $$a + (b + c) \overset{3.1}{=} (-\infty) + (b + c) \overset{3.2}{=} (-\infty) + ((+\infty) + c) \overset{3.3}{=} (-\infty) + ((+\infty) + (-\infty)) \overset{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) + \mathsf{nan} \overset{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} \overset{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} + (-\infty) \overset{3.3}{=} \mathsf{nan} + c \overset{\mathbf{AAVI}}{=} ((-\infty) + (+\infty)) + c \overset{3.1}{=} (a + (+\infty)) + c \overset{3.2}{=} (a + b) + c.$$

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

<u>Beweis **98-1**</u> `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.25.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c \in \mathbb{R})$.

`3.1:` Aus `2.25.Fall`
folgt: $a = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.25.Fall`
folgt: $b = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.24.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + c = -\infty$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + ((-\infty) + c)$
$\stackrel{3.3}{=} (-\infty) + (-\infty) \stackrel{3.4}{=} -\infty \stackrel{3.3}{=} (-\infty) + c \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((-\infty) + (-\infty)) + c$
$\stackrel{3.1}{=} (a + (-\infty)) + c \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c$.

`5:` Aus `4`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.26.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.26.Fall`
folgt: $a = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.26.Fall`
folgt: $b = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.26.Fall`
folgt: $c = +\infty$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + ((-\infty) + c)$
$\stackrel{3.3}{=} (-\infty) + ((-\infty) + (+\infty)) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) + \mathsf{nan}$
$\stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (-\infty) + (+\infty) \stackrel{3.3}{=} (-\infty) + c \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} ((-\infty) + (-\infty)) + c$
$\stackrel{3.1}{=} (a + (-\infty)) + c \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c$.

`5:` Aus `4`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

<u>Beweis **98-1**</u> `VS` gleich $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.27.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = -\infty) \wedge (c = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.26.Fall` folgt: $a = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.26.Fall` folgt: $b = -\infty$.

`3.3:` Aus `2.26.Fall` folgt: $c = -\infty$.

`4:` $$a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + (b + c) \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + ((-\infty) + c)$$
$$\stackrel{3.3}{=} (-\infty) + ((-\infty) + (-\infty)) \stackrel{\textbf{A\underline{A}VI}}{=} (-\infty) + (-\infty)$$
$$\stackrel{\textbf{A\underline{A}VI}}{=} ((-\infty) + (-\infty)) + (-\infty) \stackrel{3.1}{=} (a + (-\infty)) + (-\infty)$$
$$\stackrel{3.2}{=} (a + b) + (-\infty) \stackrel{3.3}{=} (a + b) + c.$$

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

□

98-2. Nun wird ein *Hilfs*-Satz sowohl für den **FundamentalSatz Addition** als auch für den **FundamentalSatz Addition**0 bewiesen:

98-2(Satz)

a) *Aus* "$a \in \mathbb{T}$" *folgt* "$a + 0 = 0 + a = a$".

b) *Aus* "$a \in \mathbb{T}$" *und* "$b \in \mathbb{T}$" *folgt* "$a + b = b + a$".

c) *Aus* "$a \in \mathbb{T}$" *und* "$b \in \mathbb{T}$" *und* "$c \in \mathbb{T}$" *folgt* "$a+(b+c) = (a+b)+c$".

RECH-**Notation**.

Beweis **98-2** `a)` `VS` gleich $a \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**: $(a \in \mathbb{R}) \vee (a = \mathsf{nan}) \vee (a = +\infty) \vee (a = -\infty)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $a \in \mathbb{R}$.

Aus `1.1.Fall`"$a \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $a + 0 = 0 + a = a$.

`1.2.Fall` $a = \mathsf{nan}$.

`2:` Aus **95-12**"$0 \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + 0 = 0 + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3:` Aus `1.2.Fall`"$a = \mathsf{nan}$" und
aus 2"$\mathsf{nan} + 0 = 0 + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt: $a + 0 = 0 + a = a$.

`1.3.Fall` $a = +\infty$.

`2:` Aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + 0 = 0 + (+\infty) = +\infty$.

`3:` Aus `1.3.Fall`"$a = +\infty$" und
aus 2"$(+\infty) + 0 = 0 + (+\infty) = +\infty$"
folgt: $a + 0 = 0 + a = a$.

`1.4.Fall` $a = -\infty$.

`2:` Aus **AAI**"$0 \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + 0 = 0 + (-\infty) = -\infty$.

`3:` Aus `1.4.Fall`"$a = -\infty$" und
aus 2"$(-\infty) + 0 = 0 + (-\infty) = -\infty$"
folgt: $a + 0 = 0 + a = a$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a + 0 = 0 + a = a$.

<u>Beweis **98-2**</u> `b)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `1`“$a \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **95-16**: $(a \in \mathbb{R}) \vee (a = \mathsf{nan}) \vee (a = +\infty) \vee (a = -\infty)$.

`1.2:` Aus `1`“$\ldots b \in \mathbb{T}$”
folgt via **95-16**: $(b \in \mathbb{R}) \vee (b = \mathsf{nan}) \vee (b = +\infty) \vee (b = -\infty)$.

`2:` Aus `1.1` und
aus `1.2`
folgt:

$$
\begin{aligned}
& (a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \\
\vee \quad & (a \in \mathbb{R}) \wedge (b = \mathsf{nan}) \\
\vee \quad & (a \in \mathbb{R}) \wedge (b = +\infty) \\
\vee \quad & (a \in \mathbb{R}) \wedge (b = -\infty) \\
\vee \quad & (a = \mathsf{nan}) \wedge (b \in \mathbb{R}) \\
\vee \quad & (a = \mathsf{nan}) \wedge (b = \mathsf{nan}) \\
\vee \quad & (a = \mathsf{nan}) \wedge (b = +\infty) \\
\vee \quad & (a = \mathsf{nan}) \wedge (b = -\infty) \\
\vee \quad & (a = +\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \\
\vee \quad & (a = +\infty) \wedge (b = \mathsf{nan}) \\
\vee \quad & (a = +\infty) \wedge (b = +\infty) \\
\vee \quad & (a = +\infty) \wedge (b = -\infty) \\
\vee \quad & (a = -\infty) \wedge (b \in \mathbb{R}) \\
\vee \quad & (a = -\infty) \wedge (b = \mathsf{nan}) \\
\vee \quad & (a = -\infty) \wedge (b = +\infty) \\
\vee \quad & (a = -\infty) \wedge (b = -\infty).
\end{aligned}
$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

Aus `2.1.Fall`“$(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$”
folgt via **AAV**: $a + b = b + a$.

...

Beweis **98-2** `b) VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.2.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = \mathsf{nan})$.

`3:` Aus `2.2.Fall` "$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **95-16**: $a \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3` "$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $a + \mathsf{nan} = \mathsf{nan} + a$.

`5:` Aus `4` "$a + \mathsf{nan} = \mathsf{nan} + a$" und
aus `2.2.Fall` "$\ldots b = \mathsf{nan}$"
folgt: $a + b = b + a$.

`2.3.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = +\infty)$.

`3:` Aus `2.3.Fall` "$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $a + (+\infty) = (+\infty) + a$.

`4:` Aus `3` "$a + (+\infty) = (+\infty) + a$" und
aus `2.3.Fall` "$\ldots b = +\infty$"
folgt: $a + b = b + a$.

`2.4.Fall` $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b = -\infty)$.

`3:` Aus `2.3.Fall` "$a \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $a + (-\infty) = (-\infty) + a$.

`4:` Aus `3` "$a + (-\infty) = (-\infty) + a$" und
aus `2.3.Fall` "$\ldots b = -\infty$"
folgt: $a + b = b + a$.

...

<u>Beweis **98-2**</u> `b)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.5.Fall` $(a = \mathsf{nan}) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`3:` Aus `2.5.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{R}$" und
folgt via **95-16**: $b \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus 3"$b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + b = b + \mathsf{nan}$.

`5:` Aus 4"$\mathsf{nan} + b = b + \mathsf{nan}$" und
aus `2.5.Fall`"$a = \mathsf{nan} \ldots$"
folgt: $a + b = b + a$.

`2.6.Fall` $(a = \mathsf{nan}) \wedge (b = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.6.Fall`
folgt: $a = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.6.Fall`
folgt: $b = \mathsf{nan}$.

`4:` $a + b \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + b \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} b + \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} b + a$.

`5:` Aus 4
folgt: $a + b = b + a$.

`2.7.Fall` $(a = \mathsf{nan}) \wedge (b = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.7.Fall`
folgt: $a = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.7.Fall`
folgt: $b = +\infty$.

`4:` $a + b \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + b \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + (+\infty) \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} (+\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} b + \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} b + a$.

`5:` Aus 4
folgt: $a + b = b + a$.

...

Beweis **98-2** `b)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.8.Fall` $(a = \mathsf{nan}) \wedge (b = -\infty)$.

`3.1:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $a = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.8.Fall`
folgt: $b = -\infty$.

`4:` $a + b \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + b \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + (-\infty) \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} (-\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} b + \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} b + a.$

`5:` Aus `4`
folgt: $a + b = b + a$.

`2.9.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `2.9.Fall` "$\ldots b \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAVI**: $(+\infty) + b = b + (+\infty)$.

`2:` Aus `2.9.Fall` "$a = +\infty \ldots$" und
aus `1` "$(+\infty) + b = b + (+\infty)$"
folgt: $a + b = b + a$.

`2.10.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.10.Fall`
folgt: $a = +\infty$.

`3.2:` Aus `2.10.Fall`
folgt: $b = \mathsf{nan}$.

`4:` $a + b \stackrel{3.1}{=} (+\infty) + b \stackrel{3.2}{=} (+\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} + (+\infty)$
$\stackrel{3.2}{=} b + (+\infty) \stackrel{3.1}{=} b + a.$

`5:` Aus `4`
folgt: $a + b = b + a$.

...

<u>Beweis</u> **98-2** `b)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.11.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b = +\infty)$.

`3:` Aus `2.11.Fall`“$a = +\infty\ldots$” und
aus “$(+\infty) + (+\infty) = (+\infty) + (+\infty)$”
folgt: $a + (+\infty) = (+\infty) + a$.

`4:` Aus `3`“$a + (+\infty) = (+\infty) + a$” und
aus `2.11.Fall`“$\ldots b = +\infty$”
folgt: $a + b = b + a$.

`2.12.Fall` $(a = +\infty) \wedge (b = -\infty)$.

`3:` Via **AAVI** gilt: $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty)$.

`4:` Aus `2.12.Fall`“$a = +\infty$” und
aus `3`“$(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty)$”
folgt: $a + (-\infty) = (-\infty) + a$.

`5:` Aus `4`“$a + (-\infty) = (-\infty) + a$” und
aus `2.12.Fall`“$\ldots b = -\infty$”
folgt: $a + b = b + a$.

`2.13.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b \in \mathbb{R})$.

`1:` Aus `2.13.Fall`“$\ldots b \in \mathbb{R}$”
folgt via **AAVI**: $(-\infty) + b = b + (-\infty)$.

`2:` Aus `2.13.Fall`“$a = -\infty\ldots$” und
aus `1`“$(-\infty) + b = b + (-\infty)$”
folgt: $a + b = b + a$.

...

Beweis **98-2** `b) VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.14.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.14.Fall` folgt: $a = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.14.Fall` folgt: $b = \mathsf{nan}$.

`4:` $a + b \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + b \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} + (-\infty) \stackrel{3.2}{=} b + (-\infty) \stackrel{3.1}{=} b + a$.

`5:` Aus `4` folgt: $a + b = b + a$.

`2.15.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = +\infty)$.

`3.1:` Aus `2.14.Fall` folgt: $a = -\infty$.

`3.2:` Aus `2.14.Fall` folgt: $b = +\infty$.

`4:` $a + b \stackrel{3.1}{=} (-\infty) + b \stackrel{3.2}{=} (-\infty) + (+\infty) \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + (-\infty) \stackrel{3.2}{=} b + (-\infty) \stackrel{3.1}{=} b + a$.

`5:` Aus `4` folgt: $a + b = b + a$.

`2.16.Fall` $(a = -\infty) \wedge (b = -\infty)$.

`3:` Aus `2.16.Fall` "$a = -\infty \ldots$" und aus "$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (-\infty)$" folgt: $a + (-\infty) = (-\infty) + a$.

`4:` Aus `3` "$a + (-\infty) = (-\infty) + a$" und aus `2.16.Fall` "$\ldots b = -\infty$" folgt: $a + b = b + a$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a + b = b + a$.

Beweis **98-2** `c)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T}) \wedge (c \in \mathbb{T})$.

`1.1:` Aus `1`“$a \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **95-16**: $(a \in \mathbb{S}) \vee (a = \mathsf{nan})$.

`1.2:` Aus `1`“$\ldots b \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **95-16**: $(b \in \mathbb{S}) \vee (b = \mathsf{nan})$.

`1.3:` Aus `1`“$\ldots c \in \mathbb{T}$”
folgt via **95-16**: $(c \in \mathbb{S}) \vee (c = \mathsf{nan})$.

`2:` Aus `1.1`,
aus `1.2` und
aus `1.3`
folgt:

$$\begin{aligned}
&(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})\\
\vee\quad &(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c = \mathsf{nan})\\
\vee\quad &(a \in \mathbb{S}) \wedge (b = \mathsf{nan}) \wedge (c \in \mathbb{S})\\
\vee\quad &(a = \mathsf{nan}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})\\
\vee\quad &(a \in \mathbb{S}) \wedge (b = \mathsf{nan}) \wedge (c = \mathsf{nan})\\
\vee\quad &(a = \mathsf{nan}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c = \mathsf{nan})\\
\vee\quad &(a = \mathsf{nan}) \wedge (b = \mathsf{nan}) \wedge (c \in \mathbb{S})\\
\vee\quad &(a = \mathsf{nan}) \wedge (b = \mathsf{nan}) \wedge (c = \mathsf{nan}).
\end{aligned}$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

Aus `2.1.Fall`“$(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$”
folgt via **98-1**: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

Beweis **98-2** `c)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T}) \wedge (c \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

`2.2.Fall` $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.2.Fall`
folgt: $c = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $b + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $a + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3.4:` Aus `2.2.Fall`"$a \in \mathbb{S} \ldots$" und
aus `2.2.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{S} \ldots$"
folgt via **97-2**: $a + b \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3.4`"$a + b \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $(a + b) + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`5:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} a + (b + \mathsf{nan}) \stackrel{3.2}{=} a + \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} \stackrel{4}{=} (a + b) + \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} (a + b) + c$.

`6:` Aus `5`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.3.Fall` $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b = \mathsf{nan}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2.3.Fall`
folgt: $b = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots c \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + c = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $a + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} a + (\mathsf{nan} + c) \stackrel{3.2}{=} a + \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + c \stackrel{3.3}{=} (a + \mathsf{nan}) + c \stackrel{3.1}{=} (a + b) + c$.

`5:` Aus `4`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

<u>Beweis **98-2**</u> `c)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T}) \wedge (c \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.4.Fall` $(a = \mathsf{nan}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2.4.Fall`
folgt: $a = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + b = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots c \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + c = \mathsf{nan}$.

`3.4:` Aus `2.4.Fall`"$\ldots b \in \mathbb{S}$" und
aus `2.4.Fall`"$\ldots c \in \mathbb{S}$"
folgt via **97-2**: $b + c \in \mathbb{T}$.

`4:` Aus `3.4`"$b + c \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + (b + c) = \mathsf{nan}$.

`5:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + (b + c) \stackrel{4}{=} \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} + c \stackrel{3.2}{=} (\mathsf{nan} + b) + c \stackrel{3.1}{=} (a + b) + c.$

`6:` Aus `5`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.5.Fall` $(a \in \mathbb{S}) \wedge (b = \mathsf{nan}) \wedge (c = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $b = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.5.Fall`
folgt: $c = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **AAVI**: $a + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} a + (\mathsf{nan} + c) \stackrel{3.2}{=} a + (\mathsf{nan} + \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} a + \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} (a + \mathsf{nan}) + \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} (a + b) + \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c.$

`5:` Aus `4`
folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

Beweis **98-2** `c)` `VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T}) \wedge (c \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.6.Fall` $(a = \mathsf{nan}) \wedge (b \in \mathbb{S}) \wedge (c = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.6.Fall` folgt: $a = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.6.Fall` folgt: $c = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T} \ldots$" folgt via **AAVI**: $b + \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$.

`3.4:` Aus `VS` gleich "$\ldots b \in \mathbb{T} \ldots$" folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + b = \mathsf{nan}$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + (b + c) \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + (b + \mathsf{nan}) \stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan}$
$\stackrel{3.4}{=} (\mathsf{nan} + b) + \mathsf{nan} \stackrel{3.1}{=} (a + b) + \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} (a + b) + c.$

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`2.7.Fall` $(a = \mathsf{nan}) \wedge (b = \mathsf{nan}) \wedge (c \in \mathbb{S})$.

`3.1:` Aus `2.7.Fall` folgt: $a = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.7.Fall` folgt: $b = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus `VS` gleich "$\ldots c \in \mathbb{T}$" folgt via **AAVI**: $\mathsf{nan} + c = \mathsf{nan}$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + (b + c) \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + (\mathsf{nan} + c) \stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan}$
$\stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} + c \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} (\mathsf{nan} + \mathsf{nan}) + c \stackrel{3.1}{=} (a + \mathsf{nan}) + c$
$\stackrel{3.2}{=} (a + b) + c.$

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

...

<u>Beweis</u> **98-2** `c) VS` gleich $(a \in \mathbb{T}) \wedge (b \in \mathbb{T}) \wedge (c \in \mathbb{T})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`2.8.Fall` $(a = \mathsf{nan}) \wedge (b = \mathsf{nan}) \wedge (c = \mathsf{nan})$.

`3.1:` Aus `2.8.Fall` folgt: $a = \mathsf{nan}$.

`3.2:` Aus `2.8.Fall` folgt: $b = \mathsf{nan}$.

`3.3:` Aus `2.8.Fall` folgt: $c = \mathsf{nan}$.

`4:` $a + (b + c) \stackrel{3.1}{=} \mathsf{nan} + (b + c) \stackrel{3.2}{=} \mathsf{nan} + (\mathsf{nan} + c)$
$\stackrel{3.3}{=} \mathsf{nan} + (\mathsf{nan} + \mathsf{nan}) \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} \mathsf{nan} + \mathsf{nan} \stackrel{\mathbf{97-1}}{=} (\mathsf{nan} + \mathsf{nan}) + \mathsf{nan}$
$\stackrel{3.1}{=} (a + \mathsf{nan}) + \mathsf{nan} \stackrel{3.2}{=} (a + b) + \mathsf{nan} \stackrel{3.3}{=} (a + b) + c$.

`5:` Aus `4` folgt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $a + (b + c) = (a + b) + c$.

□

98-3. Auch dieses Resultat ist ein *Hilfs*-Satz auf dem Weg zum FundamentalSatz Addition:

98-3(Satz)

Aus "x Zahl" und "y Zahl" folgt "$x + y = y + x$".

RECH-**Notation**.

Beweis **98-3** `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

REIM-Notation.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Zahl…"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x Zahl…"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "…y Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$.

`1.4:` Aus `VS` gleich "…y Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.3`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$"
folgt via **98-2**: $(\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y) = (\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}x)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `1.4`"$\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$"
folgt via **98-2**: $(\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y) = (\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x)$.

`3:`

$$x + y$$
$$\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} ((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y))$$
$$\stackrel{2.1}{=} ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y))$$
$$\stackrel{2.2}{=} ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}x))$$
$$\stackrel{\mathbf{96-25}}{=} y + x.$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x + y = y + x$.

□

98-4. Nun wird klar, dass das "KommutativGesetz Addition" nicht nur in $\mathbb{A}$ gilt:

98-4(Satz)

Aus "$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$" *folgt* "$x + y = y + x = \mathcal{U}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-4** `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

`1`: Aus `VS` gleich "$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$"
folgt via **96-14**: $(x + y = \mathcal{U}) \wedge (y + x = \mathcal{U})$.

`2`: Aus `1`
folgt: $x + y = y + x = \mathcal{U}$.

□

98-5. Das nunmehrige Resultat ist der vorletzte *Hilfs*-Satz auf dem Weg zum FundamentalSatz Addition:

98-5(Satz)

Aus "x Zahl" und "y Zahl" und "z Zahl"
folgt "$x + (y + z) = (x + y) + z$".

RECH-**Notation**.

Beweis **98-5** `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}) \wedge (z \text{ Zahl})$.

`REIM`-Notation

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Zahl..."
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "...y Zahl..."
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}y \in \mathbb{T})$.

`1.3:` Aus `VS` gleich "...z Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}z \in \mathbb{T})$.

`2.1:` Aus `1.1`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$...",
aus `2.2`"$\mathsf{Re}y \in \mathbb{T}$..." und
aus `2.3`"$\mathsf{Re}z \in \mathbb{T}$..."
folgt via **98-2**: $(\mathsf{Re}x) + ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z)) = ((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) + (\mathsf{Re}z)$.

`2.2:` Aus `1.1`"...$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$",
aus `2.2`"...$\mathsf{Im}y \in \mathbb{T}$" und
aus `2.3`"...$\mathsf{Im}z \in \mathbb{T}$"
folgt via **98-2**: $(\mathsf{Im}x) + ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}z)) = ((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)) + (\mathsf{Im}z)$.

`3:`

$$\begin{aligned}
& x + (y + z) \\
\overset{\mathbf{96-25}}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) + \mathsf{Re}(y+z)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + \mathsf{Im}(y+z)) \\
\overset{\mathbf{96-25}}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) + ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z))) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + \mathsf{Im}(y+z)) \\
\overset{\mathbf{96-25}}{=}\ & ((\mathsf{Re}x) + ((\mathsf{Re}y) + (\mathsf{Re}z))) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}z))) \\
\overset{2.1}{=}\ & (((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) + (\mathsf{Re}z)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}x) + ((\mathsf{Im}y) + (\mathsf{Im}z))) \\
\overset{2.2}{=}\ & (((\mathsf{Re}x) + (\mathsf{Re}y)) + (\mathsf{Re}z)) + \mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)) + (\mathsf{Im}z)) \\
\overset{\mathbf{96-25}}{=}\ & (\mathsf{Re}(x+y) + (\mathsf{Re}z)) + \mathsf{i} \cdot (((\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}y)) + (\mathsf{Im}z)) \\
\overset{\mathbf{96-25}}{=}\ & (\mathsf{Re}(x+y) + (\mathsf{Re}z)) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}(x+y) + (\mathsf{Im}z)) \\
\overset{\mathbf{96-25}}{=}\ & (x+y) + z.
\end{aligned}$$

`4:` Aus `3`
folgt: $x + (y + z) = (x + y) + z$.

□

98-6. Mit diesem Satz ist die letzte Hürde auf dem Weg zum FundamentalSatz Addition genommen:

98-6(Satz)

Aus "$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$" *folgt* "$x + (y + z) = (x + y) + z = \mathcal{U}$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-6** `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-14**: $x + (y + z) = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

`3:` $x + (y + z) \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + z \stackrel{2.2}{=} (x + y) + z$.

`4:` Aus `3`"$x + (y + z) = \ldots = (x + y) + z$" und aus `2.1`"$x + (y + z) = \mathcal{U}$" folgt: $x + (y + z) = (x + y) + z = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $y \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`"$y \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-14**: $y + z = \mathcal{U}$.

`3.1:` $x + (y + z) \stackrel{2.2}{=} x + \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} + z \stackrel{2.1}{=} (x + y) + z$.

`3.2:` $(x + y) + z \stackrel{2.1}{=} \mathcal{U} + z \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3.1`"$x + (y + z) = \ldots = (x + y) + z$" und aus `3.2`"$(x + y) + z = \ldots = \mathcal{U}$" folgt: $x + (y + z) = (x + y) + z = \mathcal{U}$.

...

Beweis **98-6** `VS` gleich $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$.

...

`Fallunterscheidung`

...

`1.3.Fall` $z \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.3.Fall` "$z \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $y + z = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.3.Fall` "$z \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $(x + y) + z = \mathcal{U}$.

`3:` $x + (y + z) \stackrel{2.1}{=} x + \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} (x + y) + z$.

`4:` Aus `3` "$x + (y + z) = \ldots = (x + y) + z$" und
aus `2.2` "$(x + y) + z = \mathcal{U}$"
folgt: $x + (y + z) = (x + y) + z = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt: $x + (y + z) = (x + y) + z = \mathcal{U}$.

□

98-7. KommutativGesetz und AssoziativGesetz der Additon sind voraussetzungsfrei gültig:

98-7(Satz) (FSA: FundamentalSatz Addition)

a) $x + y = y + x$.

b) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

RECH-**Notation**.

Beweis **98-7** a)

1: Es gilt: $$(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}) \vee (x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}).$$

Fallunterscheidung

1.1.Fall $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A})$.

2.1: Aus 1.1.Fall"$x \in \mathbb{A} \ldots$" folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

2.2: Aus 1.1.Fall"$\ldots y \in \mathbb{A}$" folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

3: Aus 2.1"x Zahl" und aus 2.2"y Zahl" folgt via **98-3**: $x + y = y + x$.

1.2.Fall $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A})$.

Aus 1.2.Fall"$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \in \mathbb{A})$" folgt via **98-4**: $x + y = y + x$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x + y = y + x$.

Beweis **98-7** `b)`

`1:` Es gilt:

$$(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}) \wedge (z \in \mathbb{A}) \vee (x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A}).$$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $(x \in \mathbb{A}) \wedge (y \in \mathbb{A}) \wedge (z \in \mathbb{A})$.

`2.1:` Aus `1.1.Fall`"$x \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: x Zahl.

`2.2:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots y \in \mathbb{A} \ldots$"
folgt via **95-4(Def)**: y Zahl.

`2.3:` Aus `1.1.Fall`"$\ldots z \in \mathbb{A}$"
folgt via **95-4(Def)**: z Zahl.

`3:` Aus `2.1`"x Zahl",
aus `2.2`"y Zahl" und
aus `2.3`"z Zahl"
folgt via **98-5**: $x + (y + z) = (x + y) + z$.

`1.2.Fall` $(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$.

Aus `1.2.Fall`"$(x \notin \mathbb{A}) \vee (y \notin \mathbb{A}) \vee (z \notin \mathbb{A})$"
folgt via **98-6**: $x + (y + z) = (x + y) + z$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

□

98-8. Nun werden drei einfache Anwendungen des **FSA** gegeben:

98-8(Satz)

a) $x - y = -y + x$.

b) $-x - y = -y - x$.

c) $(x - y) + (z - w) = (x + z) + (-y - w)$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-8** `ab)`

`1.1:` $$x - y = x + (-y) \overset{\textbf{FSA}}{=} (-y) + x = -y + x.$$

`1.2:` $$-x - y = (-x) + (-y) \overset{\textbf{FSA}}{=} (-y) + (-x) = -y - x.$$

`2.a):` Aus `1.1` folgt: $$x - y = -y + x.$$

`2.b):` Aus `1.2` folgt: $$-x - y = -y - x.$$

`c)`

`1:`
$$\begin{aligned}
&(x - y) + (z - w) \\
&= (x + (-y)) + (z - w) \\
&= (x + (-y)) + (z + (-w)) \\
&\overset{\textbf{FSA}}{=} x + ((-y) + (z + (-w))) \\
&\overset{\textbf{FSA}}{=} x + (((-y) + z) + (-w)) \\
&\overset{\textbf{FSA}}{=} x + ((z + (-y)) + (-w)) \\
&\overset{\textbf{FSA}}{=} x + (z + ((-y) + (-w))) \\
&\overset{\textbf{FSA}}{=} (x + z) + ((-y) + (-w)) \\
&= (x + z) + ((-y) - w) \\
&= (x + z) + (-y - w).
\end{aligned}$$

`2:` Aus `1` folgt: $$(x - y) + (z - w) = (x + z) + (-y - w).$$

□

98-9. Im **FundamentalSatz Addition**0 wird geregelt, wann $x + 0 = x$ und $0 + x = x$ gilt. Nicht zum ersten Mal tritt die Bedingung "x Zahl" oder "$x = \mathcal{U}$" auf:

98-9(Satz) (FSA0**: FundamentalSatz Addition**0)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 + x = x$.

`ii)` $x + 0 = x$.

`iii)` *"x Zahl" oder "$x = \mathcal{U}$".*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-9**

`REIM`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $0 + x = x$.

`1:` Via **FSA** gilt: $0 + x = x + 0$.

`2:` Aus `VS` gleich "$0 + x = x$" und
aus `1`"$0 + x = x + 0$"
folgt: $x + 0 = x$.

Beweis **98-9** $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x + 0 = x.$

`1`: Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A}).$

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

Aus `1.1.Fall`
folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}.$

`2`: Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $x + 0 = \mathcal{U}.$

`3`: Aus `2`"$x + 0 = \mathcal{U}$" und
aus `VS` gleich "$x + 0 = x$"
folgt: $x = \mathcal{U}.$

`4`: Aus `3`
folgt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U}).$

Beweis **98-9** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`1:` Nach `VS` gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2.1:` Aus `1.1.Fall` "x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`2.2:` Aus `1.1.Fall` "x Zahl"
folgt via **96-24**: $x = (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x)$.

`3.1:` Aus `2.1` "$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$"
folgt via **98-2**: $0 + \mathsf{Re}x = \mathsf{Re}x$.

`3.2:` Aus `2.1` "$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **98-2**: $0 + \mathsf{Im}x = \mathsf{Im}x$.

`4:`
$$\begin{aligned} & 0 + x \\ \stackrel{\mathbf{96-25}}{=} & ((\mathsf{Re}0) + (\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}0) + (\mathsf{Im}x)) \\ \stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} & (0 + (\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Im}0) + (\mathsf{Im}x)) \\ \stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} & (0 + (\mathsf{Re}x)) + \mathsf{i} \cdot (0 + (\mathsf{Im}x)) \\ \stackrel{3.1}{=} & (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (0 + (\mathsf{Im}x)) \\ \stackrel{3.2}{=} & (\mathsf{Re}x) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}x) \\ \stackrel{2.2}{=} & x. \end{aligned}$$

`5:` Aus `4`
folgt: $0 + x = x$.

`1.2.Fall` $x = \mathcal{U}$.

`2:` $0 + x \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} 0 + \mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\texttt{1.2.Fall}}{=} x$.

`3:` Aus `2`
folgt: $0 + x = x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 + x = x$.

□

98-10. Einige Folgerungen aus **FSA**0:

98-10(Satz)

a) $0 + 0 = 0$.

b) $0 + 1 = 1 + 0 = 1$.

c) $0 + \mathsf{nan} = \mathsf{nan} + 0 = \mathsf{nan}$.

d) $0 + (+\infty) = (+\infty) + 0 = +\infty$.

e) $0 + (-\infty) = (-\infty) + 0 = -\infty$.

f) $0 + \mathsf{i} = \mathsf{i} + 0 = \mathsf{i}$.

RECH-**Notation**.

<u>Beweis **98-10**</u>

`1.1:` Via **95-5** gilt: 0 Zahl.

`1.2:` Via **95-5** gilt: 1 Zahl.

`1.3:` Via **95-5** gilt: nan Zahl.

`1.4:` Via **95-5** gilt: $+\infty$ Zahl.

`1.5:` Via **95-5** gilt: $-\infty$ Zahl.

`1.6:` Via **95-5** gilt: i Zahl.

`2.a):` Aus `1.1`“0 Zahl”
folgt via **FSA**0: $0+0=0.$

`2.b):` Aus `1.2`“1 Zahl”
folgt via **FSA**0: $0+1=1+0=1.$

`2.c):` Aus `1.3`“nan Zahl”
folgt via **FSA**0: $0+\mathsf{nan}=\mathsf{nan}+0=\mathsf{nan}.$

`2.d):` Aus `1.4`“$+\infty$ Zahl”
folgt via **FSA**0: $0+(+\infty)=(+\infty)+0=+\infty.$

`2.e):` Aus `1.5`“$-\infty$ Zahl”
folgt via **FSA**0: $0+(-\infty)=(-\infty)+0=-\infty.$

`2.f):` Aus `1.6`“i Zahl”
folgt via **FSA**0: $0+\mathsf{i}=\mathsf{i}+0=\mathsf{i}.$

$\square$

98-11. Die nunmehrigen Aussagen ergeben sich via **93-1** aus den Gleichungen $0+0=0, \mathsf{nan}+\mathsf{nan}=\mathsf{nan}, (+\infty)+(+\infty)=+\infty, (-\infty)+(-\infty)=-\infty$:

98-11(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq x+y$" *folgt* "$0 \neq x$" *oder* "$0 \neq y$".

b) *Aus* "$x+y \neq \mathsf{nan}$" *folgt* "$x \neq \mathsf{nan}$" *oder* "$y \neq \mathsf{nan}$".

c) *Aus* "$x+y \neq +\infty$" *folgt* "$x \neq +\infty$" *oder* "$y \neq +\infty$".

d) *Aus* "$x+y \neq -\infty$" *folgt* "$x \neq -\infty$" *oder* "$y \neq -\infty$".

RECH-**Notation**.

Beweis **98-11** a) VS gleich $0 \neq x+y$.

1: Via **98-10** gilt: $0+0=0$.

2: Aus 1"$0+0=0$" und aus VS gleich "$0 \neq x+y$" folgt: $0+0 \neq x+y$.

3: Aus 2 folgt: $x+y \neq 0+0$.

3: Aus 2"$x+y \neq 0+0$" folgt via **93-1**: $(x \neq 0) \vee (y \neq y0)$.

4: Aus 3 folgt: $(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$.

b) VS gleich $x+y \neq \mathsf{nan}$.

1: Via **97-1** gilt: $\mathsf{nan}+\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$.

2: Aus 1"$\mathsf{nan}+\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$" und aus VS gleich "$x+y \neq \mathsf{nan}$" folgt: $x+y \neq \mathsf{nan}+\mathsf{nan}$.

3: Aus 3"$x+y \neq \mathsf{nan}+\mathsf{nan}$" folgt via **93-1**: $(x \neq \mathsf{nan}) \vee (y \neq \mathsf{nan})$.

<u>Beweis **98-11**</u> `c)` `VS` gleich $x + y \neq +\infty$.

`1:` Via **AAVI** gilt: $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

`2:` Aus `1` "$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$" und
aus `VS` gleich "$x + y \neq +\infty$"
folgt: $x + y \neq (+\infty) + (+\infty)$.

`3:` Aus `3` "$x + y \neq (+\infty) + (+\infty)$"
folgt via **93-1**: $(x \neq +\infty) \vee (y \neq +\infty)$.

`5:`

`d)` `VS` gleich $x + y \neq -\infty$.

`1:` Via **AAVI** gilt: $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

`2:` Aus `1` "$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$" und
aus `VS` gleich "$x + y \neq -\infty$"
folgt: $x + y \neq (-\infty) + (-\infty)$.

`3:` Aus `2` "$x + y \neq (-\infty) + (-\infty)$"
folgt via **93-1**: $(x \neq -\infty) \vee (x \neq -\infty)$.

$\square$

98-12. Ist einer der Terme von **FSA**0 das Resultat einer “Operation”, die nur eine Zahl oder $\mathcal{U}$ als Resultat zuläß, so ist die Summe dieses Terms und 0 gleich diesem Term:

98-12(Satz)

a) $0 + \mathsf{Re}x = (\mathsf{Re}x) + 0 = \mathsf{Re}x.$

b) $0 + \mathsf{Im}x = (\mathsf{Im}x) + 0 = \mathsf{Im}x.$

c) $0 - x = -x + 0 = -x.$

d) $0 + \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) + 0 = \mathsf{rez}(x).$

e) $0 + \mathsf{ab2}(x) = \mathsf{ab2}(x) + 0 = \mathsf{ab2}(x).$

f) $0 + (x + y) = (x + y) + 0 = x + y.$

g) $0 + x \cdot y = x \cdot y + 0 = x \cdot y.$

h) $0 + x : y = x : y + 0 = x : y.$

REIM.RECH-**Notation**.

<u>Beweis</u> **98-12** `a)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(\mathsf{Re}x \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Re}x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Re}x$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`"$\mathsf{Re}x$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + \mathsf{Re}x = (\mathsf{Re}x) + 0 = \mathsf{Re}x$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Re}x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$\mathsf{Re}x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2"$\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$"
folgt via **FSA**0: $0 + \mathsf{Re}x = (\mathsf{Re}x) + 0 = \mathsf{Re}x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$0 + \mathsf{Re}x = (\mathsf{Re}x) + 0 = \mathsf{Re}x$.

`b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(\mathsf{Im} \text{ Zahl}) \vee (\mathsf{Im}x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Im}x$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`"$\mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + \mathsf{Im}x = (\mathsf{Im}x) + 0 = \mathsf{Im}x$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Im}x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$\mathsf{Im}x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2"$\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$"
folgt via **FSA**0: $0 + \mathsf{Im}x = (\mathsf{Im}x) + 0 = \mathsf{Im}x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$0 + \mathsf{Im}x = (\mathsf{Im}x) + 0 = \mathsf{Im}x$.

Beweis **98-12** `c)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(-x \text{ Zahl}) \vee (-x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $-x$ Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"$-x$ Zahl" folgt via **FSA**0: $0 + (-x) = (-x) + 0 = -x$.

`3:` Aus `2` folgt: $0 - x = -x + 0 = -x$.

`1.2.Fall` $-x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$-x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-12**: $-x = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`"$-x = \mathcal{U}$" folgt via **FSA**0: $0 + (-x) = (-x) + 0 = -x$.

`4:` Aus `3` folgt: $0 - x = -x + 0 = -x$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $0 - x = -x + 0 = -x$.

<u>Beweis</u> **98-12** `d)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(\mathsf{rez}(x)\ \text{Zahl}) \vee (\mathsf{rez}(x) \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`“$\mathsf{rez}(x)$ Zahl”
folgt via **FSA**0: $0 + \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) + 0 = \mathsf{rez}(x)$.

`1.2.Fall` $\mathsf{rez}(x) \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$\mathsf{rez}(x) \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-12**: $\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{rez}(x) = \mathcal{U}$”
folgt via **FSA**0: $0 + \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) + 0 = \mathsf{rez}(x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$0 + \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) + 0 = \mathsf{rez}(x)$.

`e)`

`1:` Via **96-22** gilt: $(\mathsf{ab2}(x)\ \text{Zahl}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$.

`2:` Aus `1`“$(\mathsf{ab2}(x)\ \text{Zahl}) \vee (\mathsf{ab2}(x) = \mathcal{U})$”
folgt via **FSA**0: $0 + \mathsf{ab2}(x) = \mathsf{ab2}(x) + 0 = \mathsf{ab2}(x)$.

Beweis **98-12** `f)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x + y \text{ Zahl}) \vee (x + y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x + y$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`"$x + y$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + (x + y) = (x + y) + 0 = x + y$.

`1.2.Fall` $x + y \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x + y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-14**: $x + y = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2"$x + y = \mathcal{U}$"
folgt via **FSA**0: $0 + (x + y) = (x + y) + 0 = x + y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$0 + (x + y) = (x + y) + 0 = x + y$.

`g)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \cdot y \text{ Zahl}) \vee (x \cdot y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x \cdot y$ Zahl.

Aus `1.1.Fall`"$x \cdot y$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + x \cdot y = x \cdot y + 0 = x \cdot y$.

`1.2.Fall` $x \cdot y \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \cdot y \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-16**: $x \cdot y = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2"$x \cdot y = \mathcal{U}$"
folgt via **FSA**0: $0 + x \cdot y = x \cdot y + 0 = x \cdot y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$0 + x \cdot y = x \cdot y + 0 = x \cdot y$.

<u>Beweis **98-12** `h)`</u>

`1:` Via **95-6** gilt: $(x : y \text{ Zahl}) \vee (x : y \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x : y \in \mathbb{A}$.

Aus `1.1.Fall`“$x : y$ Zahl”
folgt via **FSA**0: $0 + x : y = x : y + 0 = x : y$.

`1.2.Fall` $x : y \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x : y \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-18**: $x : y = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2`“$x : y = \mathcal{U}$”
folgt via **FSA**0: $0 + x : y = x : y + 0 = x : y$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:
$0 + x : y = x : y + 0 = x : y$.

□

98-13. Dieses auch an sich ganz interessante Resultat ist der erste Schritt auf dem Weg zum Beweis FundamentalSatz Multiplikation0:

98-13(Satz)

Aus "$p \in \mathbb{R}$" und "$p + p = p$" folgt "$p = 0$".

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-13** `VS` gleich $(p \in \mathbb{R}) \wedge (p + p = p)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **96-36**: $-p + p = 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "$p \in \mathbb{R} \ldots$"
folgt via **AAV**: $0 + p = p$.

`2:` Aus `1.1` "$-p + p = 0$" und
aus `VS` gleich "$\ldots p + p = p$"
folgt: $-p + (p + p) = 0$.

`3:`
$$0 \stackrel{2}{=} -p + (p + p) = (-p) + (p + p) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} ((-p) + p) + p = (-p + p) + p \stackrel{1.1}{=} 0 + p \stackrel{1.2}{=} p.$$

`4:` Aus `3`
folgt: $0 = p$.

`5:` Aus `4`
folgt: $p = 0$.

□

98-14. Nun wird eine "additive Inversions-Formel in $\mathbb{R}$" etabliert. Die Beweis-Reihenfolge ist `a) - c) - b)`:

98-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $p \in \mathbb{R}$.

$\rightarrow$) $p + q = 0$.

Dann folgt:

`a)` $q = -p$.

`b)` $p = -q$.

`c)` $q \in \mathbb{R}$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-14** `ac)`

`1.1:` Aus $\rightarrow$) "$p \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $-p \in \mathbb{R}$.

`1.2:` Aus $\rightarrow$) "$p \in \mathbb{R}$"
folgt via **96-36**: $-p + p = 0$.

`1.3:` Via $0\mathcal{U}$**Axiom** gilt: 0 Menge.

`2.1:` Aus `1.1`"$-p \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $0 + (-p) = -p$.

`2.2:` Aus $\rightarrow$) "$p + q = 0$" und
aus `1.3`"0 Menge"
folgt: $q + p$ Menge.

`3:` Aus `2.2`"$q + p$ Menge"
folgt via **96-13**: q Zahl.

`4:` Aus `3`"q Zahl"
folgt via **FSA**0: $0 + q = q$.

...

Beweis **98-14** `ac)` ...

`5:`

$$-p \stackrel{2.1}{=} 0+(-p) \stackrel{\rightarrow)}{=} (p+q)+(-p) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} (-p)+(p+q) \stackrel{\mathbf{FSA}}{=} ((-p)+p)+q = (-p+p)+q \stackrel{1.2}{=} 0+q \stackrel{4}{=} q.$$

`6:` Aus `5`
folgt: $-p=q.$

`7.a):` Aus `6`
folgt: $q=-p.$

`8.c):` Aus `7.a)` "$q=-p$" und
aus `1.1` "$-p \in \mathbb{R}$"
folgt: $q \in \mathbb{R}.$

`b)`

`1:` Aus →) "$p \in \mathbb{R}$" und
aus →) "$p+q \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $q \in \mathbb{R}.$

`2:` Via **FSA** gilt: $q+p=p+q.$

`3:` Aus `2` "$q+p=p+q$" und
aus →) "$p+q \in \mathbb{R}$"
folgt: $q+p \in \mathbb{R}.$

`4:` Aus `1` "$q \in \mathbb{R}$" und
aus `3` "$q+p \in \mathbb{R}$"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $p=-q.$

□

98-15. Nun wird **98-14** auf 0 angewendet:

98-15(Satz)

a) $-0 = 0$.

b) $0 - 0 = -0 + 0 = -0 - 0 = 0$.

c) $x - 0 = x + 0$.

d) $-0 + x = 0 + x$.

RECH-**Notation**.

Beweis **98-15** a)

Aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$” und
aus **98-10**“$0+0=0$”
folgt via **98-14**: $0=-0$.

b)

1.1: $0-0=0+(-0) \overset{\text{a)}}{=} 0+0 \overset{\mathbf{98-10}}{=} 0$.

1.2: $-0+0=(-0)+0 \overset{\text{a)}}{=} 0+0 \overset{\mathbf{98-10}}{=} 0$.

1.3: $-0-0=(-0)+(-0) \overset{\text{a)}}{=} 0+0 \overset{\mathbf{98-10}}{=} 0$.

2: Aus 1.1“$0-0=\ldots=0$”,
aus 1.2“$-0+0=\ldots=0$” und
aus 1.3“$-0-0=0$”
folgt: $0-0=-0+0=-0-0=0$.

c)

1: $x-0=x+(-0) \overset{\text{a)}}{=} x+0$.

2: Aus 1
folgt: $x-0=x+0$.

d)

1: $-0+x \overset{\text{a)}}{=} 0+x$.

2: Aus 1
folgt: $-0+x=0+x$.

□

98-16. Nun wird der FundamentalSatz Multiplikation0 gut sichtbar vorbereitet:

98-16(Satz)

a) *Aus "x Zahl" folgt "$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$".*

b) $0 \cdot 0 = 0$.

c) *Aus "x Zahl" und "y Zahl" und "$0 \neq x \cdot y$" folgt "$0 \neq x$" und "$0 \neq y$".*

RECH-**Notation**.

Beweis **98-16**

`REIM`-**Notation**.

---

a) `VS` gleich x Zahl.

$\boxed{\texttt{Thema1.1}}$	$\alpha \in \mathbb{R}$.
`2.1`: Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{R}$”, aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$” und aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$” folgt via **AAV**:	$\alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$.
`2.2`: Aus **98-10**“$0+0=0$” folgt:	$\alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0$.
`3`: Aus `2.1`“$\alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$” und aus `2.2`“$\alpha \cdot (0+0) = \alpha \cdot 0$” folgt:	$\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0$.
`4`: Aus `Thema1.1`“$\alpha \in \mathbb{R}$” und aus **AAI**“$0 \in \mathbb{R}$” folgt via **AAV**:	$(\alpha \cdot 0 \in \mathbb{R}) \wedge (\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha)$.
`5`: Aus `4`“$\alpha \cdot 0 \in \mathbb{R} \ldots$” und aus `3`“$\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0$” folgt via **98-13**:	$\alpha \cdot 0 = 0$.
`6`: Aus `4`“$\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha$” und aus `5`“$\alpha \cdot 0 = 0$” folgt:	$0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$.

Ergo `Thema1.1`: $\boxed{\texttt{A1} \mid \text{“}\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0)\text{”}}$

...

Beweis **98-16** `a)` `VS` gleich x Zahl.

...

`Thema1.2` $\beta \in \mathbb{T}$.

2: Aus `Thema1.2` "$\beta \in \mathbb{T}$"
folgt via **95-16**:
$$(\beta \in \mathbb{R}) \vee (\beta = \mathsf{nan}) \vee (\beta = +\infty) \vee (\beta = -\infty).$$

`Fallunterscheidung`

`2.1.Fall` $\beta \in \mathbb{R}$.

Aus `2.1.Fall` "$\beta \in \mathbb{R}$" und
aus `A1` gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{R}) \Rightarrow (0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0)$"
folgt: $0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0.$

`2.2.Fall` $\beta = \mathsf{nan}$.

Aus **AAVI** "$0 \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan} \cdot 0 = 0$" und
aus `2.2.Fall` "$\beta = \mathsf{nan}$"
folgt: $0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0.$

`2.3.Fall` $\beta = +\infty$.

Aus **AAVI** "$0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$" und
aus `2.3.Fall` "$\beta = +\infty$"
folgt: $0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0.$

`2.4.Fall` $\beta = -\infty$.

Aus **AAVI** "$0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$" und
aus `2.4.Fall` "$\beta = -\infty$"
folgt: $0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0.$

`Ende Fallunterscheidung` In allen Fällen gilt:
$$0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0.$$

Ergo `Thema1.2`: `A2` | "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0)$"

...

<u>Beweis **98-16**</u> `a)` `VS` gleich x Zahl.

...

`1.3:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`2.1:` Aus `1.3`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}\ldots$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0)$"
folgt: $0 \cdot \mathsf{Re}x = 0$.

`2.2:` Aus `1.3`"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}\ldots$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0)$"
folgt: $(\mathsf{Re}x) \cdot 0 = 0$.

`2.3:` Aus `1.3`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0)$"
folgt: $0 \cdot \mathsf{Im}x = 0$.

`2.4:` Aus `1.3`"$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$" und
aus `A2` gleich "$\forall \beta : (\beta \in \mathbb{T}) \Rightarrow (0 \cdot \beta = \beta \cdot 0 = 0)$"
folgt: $(\mathsf{Im}x) \cdot 0 = 0$.

`3.1:`
$$
\begin{aligned}
& 0 \cdot x \\
\stackrel{\mathbf{96-26}}{=}\ & ((\mathsf{Re}0) \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}0) \cdot (\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}0) \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}0) \cdot (\mathsf{Re}x)) \\
\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=}\ & (0 \cdot (\mathsf{Re}x) - (\mathsf{Im}0) \cdot (\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i} \cdot (0 \cdot (\mathsf{Im}x) + (\mathsf{Im}0) \cdot (\mathsf{Re}x)) \\
\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=}\ & (0 \cdot (\mathsf{Re}x) - 0 \cdot (\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i} \cdot (0 \cdot (\mathsf{Im}x) + 0 \cdot (\mathsf{Re}x)) \\
\stackrel{2.1}{=}\ & (0 - 0 \cdot (\mathsf{Im}x)) + \mathsf{i} \cdot (0 \cdot (\mathsf{Im}x) + 0) \\
\stackrel{2.3}{=}\ & (0 - 0) + \mathsf{i} \cdot (0 + 0) \\
\stackrel{\mathbf{98-15}}{=}\ & 0 + \mathsf{i} \cdot (0 + 0) \\
\stackrel{\mathbf{98-10}}{=}\ & 0 + \mathsf{i} \cdot 0 \\
\stackrel{\mathbf{96-35}}{=}\ & 0.
\end{aligned}
$$

...

<u>Beweis **98-16**</u> `a)` `VS` gleich x Zahl.

...

`3.2:` $x \cdot 0$

$$\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Re}0) - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}0)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}0) + (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Re}0))$$

$$\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot 0 - (\mathsf{Im}x) \cdot (\mathsf{Im}0)) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot (\mathsf{Im}0) + (\mathsf{Im}x) \cdot 0)$$

$$\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} ((\mathsf{Re}x) \cdot 0 - (\mathsf{Im}x) \cdot 0) + \mathsf{i} \cdot ((\mathsf{Re}x) \cdot 0 + (\mathsf{Im}x) \cdot 0)$$

$$\stackrel{2.2}{=} (0 - (\mathsf{Im}x) \cdot 0) + \mathsf{i} \cdot (0 + (\mathsf{Im}x) \cdot 0)$$

$$\stackrel{2.4}{=} (0 - 0) + \mathsf{i} \cdot (0 + 0)$$

$$\stackrel{\mathbf{98-15}}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot (0 + 0)$$

$$\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0 + \mathsf{i} \cdot 0$$

$$\stackrel{\mathbf{96-35}}{=} 0.$$

`4:` Aus `3.1`“$0 \cdot x = \ldots = 0$” und
aus `3.2`“$x \cdot 0 = \ldots 0$”
folgt: $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0.$

`b)`

Aus **95-5**“0 Zahl”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \cdot 0 = 0.$

Beweis **98-16** `c)` `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl}) \wedge (0 \neq x \cdot y)$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Zahl…"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \cdot 0 = 0$.

`1.2:` Aus `VS` gleich "…y Zahl"
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $0 \cdot y = 0$.

`2.1:` Aus `1.1`"$x \cdot 0 = 0$" und
aus `VS` gleich "…$0 \neq x \cdot y$"
folgt: $x \cdot 0 \neq x \cdot y$.

`2.2:` Aus `1.2`"$0 \cdot y = 0$" und
aus `VS` gleich "…$0 \neq x \cdot y$"
folgt: $0 \cdot y \neq x \cdot y$.

`3.1:` Aus `2.1`"$x \cdot 0 \neq x \cdot y$"
folgt via **93-1**: $0 \neq y$.

`3.2:` Aus `2.2`"$0 \cdot y \neq x \cdot y$"
folgt via **93-1**: $x \neq 0$.

`4:` Aus `3.2`
folgt: $0 \neq x$.

`5:` Aus `4`"$0 \neq x$" und
aus `3.1`"$0 \neq y$"
folgt: $(0 \neq x) \wedge (0 \neq y)$.

□

98-17. Im **FundamentalSatz Multiplikation**0 wird festgestellt, dass x genau dann eine Zahl ist, wenn $0 \cdot x = 0$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $x \cdot 0 = 0$:

98-17(Satz) (**FSM**0: **FundamentalSatz Multiplikation**0)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 \cdot x = 0$.

`ii)` $x \cdot 0 = 0$.

`iii)` x *Zahl.*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-17** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 \cdot x = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \cdot x = 0$" und
aus **95-5**"0 Zahl"
folgt: $0 \cdot x$ Zahl.

`2:` Aus `1`"$0 \cdot x$ Zahl"
folgt via **96-15**: x Zahl.

`3:` Aus `2`"x Zahl"
folgt via **98-16**: $x \cdot 0 = 0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x \cdot 0 = 0$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot 0 = 0$" und
aus **95-5**"0 Zahl"
folgt: $x \cdot 0$ Zahl.

`2:` Aus `1`"$x \cdot 0$ Zahl"
folgt via **96-15**: x Zahl.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich x Zahl.

Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **98-16**: $0 \cdot x = 0$.

□

98-18. Da 1 und i Zahlen sind, ergibt sich fast von selbst aus **FSM**0 das nunmehrige Resultat:

<u>**98-18(Satz)**</u>

a) $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$.

b) $0 \cdot \mathsf{i} = \mathsf{i} \cdot 0 = 0$.

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **98-18**</u>

`1.1:` Aus **95-5**"1 Zahl"
folgt via **FSM**0: $(0 \cdot 1 = 0) \wedge (1 \cdot 0 = 0)$.

`1.2:` Aus **95-5**"i Zahl"
folgt via **FSM**0: $(0 \cdot \mathsf{i} = 0) \wedge (\mathsf{i} \cdot 0 = 0)$.

`2.a):` Aus `1.1`
folgt: $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$.

`2.b):` Aus `1.2`$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$
folgt: $0 \cdot \mathsf{i} = \mathsf{i} \cdot 0 = 0$.

□

98-19. Der Aussage **98-18** werden weitere Resultate über Produkte zur Seite gestellt. Beim Beweis der - bekannten - Aussage `b)` zeigt sich, wie aufwändig es im Rahmen der "beweisenden Mathematik" ist, Ergebnisse der "rechnenden Mathematik" zu erhalten:

98-19(Satz)

`a)` $1 \cdot 1 = 1$.

`b)` $\mathsf{i} \cdot \mathsf{i} = -1$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-19**

`REIM`-**Notation**.

`a)`

Aus **AAI**"$1 \in \mathbb{R}$"
folgt via **AAV**: $1 \cdot 1 = 1$.

Beweis **98-19** `b)`

`1:` Aus **95-5**"1 Zahl
folgt via **96-11**: -1 Zahl.

`2.1:` Aus 2"-1 Zahl"
folgt via **FSA**0: $0+(-1)=-1$.

`2.2:` Aus 2"-1 Zahl"
folgt via **FSA**0: $(-1)+0=-1$.

`3:`

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{i}\cdot\mathsf{i}\\
&\stackrel{\mathbf{96-26}}{=} ((\mathsf{Re}\,\mathsf{i})\cdot(\mathsf{Re}\,\mathsf{i})-(\mathsf{Im}\,\mathsf{i})\cdot(\mathsf{Im}\,\mathsf{i}))+\mathsf{i}\cdot((\mathsf{Re}\,\mathsf{i})\cdot(\mathsf{Im}\,\mathsf{i})+(\mathsf{Im}\,\mathsf{i})\cdot(\mathsf{Re}\,\mathsf{i}))\\
&\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} (0\cdot 0-(\mathsf{Im}\,\mathsf{i})\cdot(\mathsf{Im}\,\mathsf{i}))+\mathsf{i}\cdot(0\cdot(\mathsf{Im}\,\mathsf{i})+(\mathsf{Im}\,\mathsf{i})\cdot 0)\\
&\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} (0\cdot 0-1\cdot 1)+\mathsf{i}\cdot(0\cdot 1+1\cdot 0)\\
&\stackrel{\mathbf{98-16}}{=} (0-1\cdot 1)+\mathsf{i}\cdot(0\cdot 1+1\cdot 0)\\
&\stackrel{\mathrm{a)}}{=} (0-1)+\mathsf{i}\cdot(0\cdot 1+1\cdot 0)\\
&\stackrel{\mathbf{98-18}}{=} (0-1)+\mathsf{i}\cdot(0+1\cdot 0)\\
&\stackrel{\mathbf{98-18}}{=} (0-1)+\mathsf{i}\cdot(0+0)\\
&= (0+(-1))+\mathsf{i}\cdot(0+0)\\
&\stackrel{2.1}{=} (-1)+\mathsf{i}\cdot(0+0)\\
&\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} (-1)+\mathsf{i}\cdot 0\\
&\stackrel{\mathbf{98-18}}{=} (-1)+0\\
&\stackrel{2.2}{=} -1.
\end{aligned}
$$

`4:` Aus `3`
folgt: $\mathsf{i}\cdot\mathsf{i}=-1$.

$\square$

98-20. Aus bereits ermittelten Produkten lassen sich via **93-1** weitere Konsequenzen ziehen:

98-20(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq x \cdot y$" *folgt* "$0 \neq x$" *oder* "$0 \neq y$".

b) *Aus* "$x \cdot y \neq 1$" *folgt* "$x \neq 1$" *oder* "$y \neq 1$".

c) *Aus* "$x \cdot y \neq \mathsf{nan}$" *folgt* "$x \neq \mathsf{nan}$" *oder* "$y \neq \mathsf{nan}$".

d) *Aus* "$x \cdot y \neq +\infty$" *folgt* "$x \neq +\infty$" *oder* "$y \neq +\infty$".

e) *Aus* "$x \cdot y \neq +\infty$" *folgt* "$x \neq -\infty$" *oder* "$y \neq -\infty$".

f) *Aus* "$x \cdot y \neq -1$" *folgt* "$x \neq \mathsf{i}$" *oder* "$y \neq \mathsf{i}$".

RECH-**Notation**.

Beweis **98-20** a) VS gleich $0 \neq x \cdot y$.

1: Aus **98-16** "$0 \cdot 0 = 0$" und
aus VS gleich "$0 \neq x \cdot y$"
folgt: $0 \cdot 0 \neq x \cdot y$.

2: Aus 1 "$0 \cdot 0 \neq x \cdot y$"
folgt via **93-1**: $(0 \neq x) \vee (0 \neq y)$.

b) VS gleich $x \cdot y \neq 1$.

1: Aus VS gleich "$x \cdot y \neq 1$" und
aus **98-19** "$1 \cdot 1 = 1$"
folgt: $x \cdot y \neq 1 \cdot 1$.

2: Aus 1 "$x \cdot y \neq 1 \cdot 1$"
folgt via **93-1**: $(x \neq 1) \vee (y \neq 1)$.

Beweis **98-20** `c)` `VS` gleich $x \cdot y \neq \mathsf{nan}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y \neq \mathsf{nan}$" und
aus **97-5** "$\mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan} = \mathsf{nan}$"
folgt: $x \cdot y \neq \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}$.

`2:` Aus `1` "$x \cdot y \neq \mathsf{nan} \cdot \mathsf{nan}$"
folgt via **93-1**: $(x \neq \mathsf{nan}) \vee (y \neq \mathsf{nan})$.

`d)` `VS` gleich $x \cdot y \neq +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y \neq +\infty$" und
aus **AAVI** "$(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$"
folgt: $x \cdot y \neq (+\infty) \cdot (+\infty)$.

`2:` Aus `1` "$x \cdot y \neq (+\infty) \cdot (+\infty)$"
folgt via **93-1**: $(x \neq +\infty) \vee (y \neq +\infty)$.

`e)` `VS` gleich $x \cdot y \neq +\infty$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y \neq +\infty$" und
aus **AAVI** "$(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$"
folgt: $x \cdot y \neq (-\infty) \cdot (-\infty)$.

`2:` Aus `1` "$x \cdot y \neq (-\infty) \cdot (-\infty)$"
folgt via **93-1**: $(x \neq -\infty) \vee (y \neq -\infty)$.

`f)` `VS` gleich $x \cdot y \neq -1$.

`1:` Aus `VS` gleich "$x \cdot y \neq -1$" und
aus **98-19** "$\mathsf{i} \cdot \mathsf{i} = -1$"
folgt: $x \cdot y \neq \mathsf{i} \cdot \mathsf{i}$.

`2:` Aus `1` "$x \cdot y \neq \mathsf{i} \cdot \mathsf{i}$"
folgt via **93-1**: $(x \neq \mathsf{i}) \vee (y \neq \mathsf{i})$.

□

98-21. Falls x eine Zahl ist, dann gilt $0 \cdot (-x) = (-x) \cdot 0 = 0$ und $0 \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) \cdot 0 = 0$:

<u>98-21(Satz)</u>

a) *Aus "x Zahl" folgt "$0 \cdot (-x) = (-x) \cdot 0 = 0$".*

b) *Aus "x Zahl" folgt "$0 \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) \cdot 0 = 0$".*

<u>`RECH`-**Notation**</u>.

<u>Beweis **98-21**</u> `VS` gleich x Zahl.

`1:` Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-11**: $(-x \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{rez}(x) \text{ Zahl})$.

`2.1:` Aus `1`"$-x$ Zahl…"
folgt via **FSM**0: $(0 \cdot (-x) = 0) \wedge ((-x) \cdot 0 = 0)$.

`2.2:` Aus `1`"…$\mathsf{rez}(x)$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $(0 \cdot \mathsf{rez}(x) = 0) \wedge (\mathsf{rez}(x) \cdot 0 = 0)$.

`3.a):` Aus `2.1`
folgt: $0 \cdot (-x) = (-x) \cdot 0 = 0$.

`3.b):` Aus `2.2`
folgt: $0 \cdot \mathsf{rez}(x) = \mathsf{rez}(x) \cdot 0 = 0$.

□

98-22. Falls x, y Zahlen sind, dann gilt $0\cdot(x+y)=(x+y)\cdot 0=0$ und $0\cdot(x\cdot y)=(x\cdot y)\cdot 0=0$ und $0\cdot(x:y)=(x:y)\cdot 0=0$:

98-22(Satz)

a) *Aus "x Zahl" und "y Zahl" folgt "$0\cdot(x+y)=(x+y)\cdot 0=0$".*

b) *Aus "x Zahl" und "y Zahl" folgt "$0\cdot(x\cdot y)=(x\cdot y)\cdot 0=0$".*

c) *Aus "x Zahl" und "y Zahl" folgt "$0\cdot(x:y)=(x:y)\cdot 0=0$".*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-22** `VS` gleich $(x \text{ Zahl}) \wedge (y \text{ Zahl})$.

`1.1:` Aus `VS` gleich "x Zahl..." und aus `VS` gleich "...y Zahl" folgt via **96-13**: $x+y$ Zahl.

`1.2:` Aus `VS` gleich "x Zahl..." und aus `VS` gleich "...y Zahl" folgt via **96-15**: $x\cdot y$ Zahl.

`1.3:` Aus `VS` gleich "x Zahl..." und aus `VS` gleich "...y Zahl" folgt via **96-17**: $x:y$ Zahl.

`2.1:` Aus `1.1`"$x+y$ Zahl" folgt via **FSM**0: $(0\cdot(x+y)=0)\wedge((x+y)\cdot 0=0)$.

`2.2:` Aus `1.2`"$x\cdot y$ Zahl" folgt via **FSM**0: $(0\cdot(x\cdot y)=0)\wedge((x\cdot y)\cdot 0=0)$.

`2.3:` Aus `1.3`"$x:y$ Zahl" folgt via **FSM**0: $(0\cdot(x:y)=0)\wedge((x:y)\cdot 0=0)$.

`3.a):` Aus `2.1` folgt: $0\cdot(x+y)=(x+y)\cdot 0=0$.

`3.b):` Aus `2.2` folgt: $0\cdot(x\cdot y)=(x\cdot y)\cdot 0=0$.

`3.c):` Aus `2.3` folgt: $0\cdot(x:y)=(x:y)\cdot 0=0$.

□

98-23. Im **FundamentalSatz Division**0 wird fest gestellt, dass x genau dann ein Zahl ist, wenn $0 : x = 0$ und dies ist genau dann der Fall, wenn $x : 0 = 0$:

98-23(Satz) (**FSD**0: **FundamentalSatz Division**0)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` $0 : x = 0$.

`ii)` $x : 0 = 0$.

`iii)` x *Zahl.*

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-23** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich $0 : x = 0.$

1: Aus `VS` gleich "$0 : x = 0$"
folgt: $0 \cdot \mathsf{rez}(x) = 0.$

2: Aus 1"$0 \cdot \mathsf{rez}(x) = 0$"
folgt via **FSM**0: $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

3: Aus 2"$\mathsf{rez}(x)$ Zahl"
folgt via **96-11**: x Zahl.

4: Aus 3"x Zahl"
folgt via **FSM**0: $x \cdot 0 = 0.$

5: $x : 0 = x \cdot \mathsf{rez}(0) \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} x \cdot 0 \stackrel{4}{=} 0.$

6: Aus 5
folgt: $x : 0 = 0.$

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $x : 0 = 0.$

1: $x \cdot 0 \stackrel{\textbf{AAVI}}{=} x \cdot \mathsf{rez}(0) = x : 0 \stackrel{\texttt{VS}}{=} 0.$

2: Aus 1"$x \cdot 0 = \ldots = 0$"
folgt via **FSM**0: x Zahl.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich x Zahl.

1: Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-11**: $\mathsf{rez}(x)$ Zahl.

2: Aus 1"$\mathsf{rez}(x)$ Zahl"
folgt via **FSM**0: $0 \cdot \mathsf{rez}(x) = 0.$

3: $0 : x = 0 \cdot \mathsf{rez}(x) \stackrel{2}{=} 0.$

4: Aus 3
folgt: $0 : x = 0.$

$\square$

98-24. Da $0, 1, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty, \mathsf{i}$ Zahlen sind, folgt ohne viel Aufwand das vorliegende Resultat:

98-24(Satz)

a) $0 : 0 = 0$.

b) $1 : 0 = 0 : 1 = 0$.

c) $\mathsf{nan} : 0 = 0 : \mathsf{nan} = 0$.

d) $(+\infty) : 0 = 0 : (+\infty) = 0$.

e) $(-\infty) : 0 = 0 : (-\infty) = 0$.

f) $\mathsf{i} : 0 = 0 : \mathsf{i} = 0$.

`RECH`-**Notation**.

Beweis **98-24** a)

Aus **95-5**“0 Zahl”
folgt via **FSD**0: $0 : 0 = 0$.

b)

1: Aus **95-5**“1 Zahl”
folgt via **FSD**0: $(1 : 0 = 0) \wedge (0 : 1 = 0)$.

2: Aus 1
folgt: $1 : 0 = 0 : 1 = 0$.

c)

1: Aus **95-5**“nan Zahl”
folgt via **FSD**0: $(\mathsf{nan} : 0 = 0) \wedge (0 : \mathsf{nan} = 0)$.

2: Aus 1
folgt: $\mathsf{nan} : 0 = 0 : \mathsf{nan} = 0$.

Beweis **98-24** `d)`

`1:` Aus **95-5**“$+\infty$ Zahl”
folgt via **FSD**0: $((+\infty) : 0 = 0) \wedge (0 : (+\infty) = 0).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(+\infty) : 0 = 0 : (+\infty) = 0.$

`e)`

`1:` Aus **95-5**“$-\infty$ Zahl”
folgt via **FSD**0: $((-\infty) : 0 = 0) \wedge (0 : (-\infty) = 0).$

`2:` Aus `1`
folgt: $(-\infty) : 0 = 0 : (-\infty) = 0.$

`f)`

`1:` Aus **95-5**“i Zahl”
folgt via **FSD**0: $(\mathsf{i} : 0 = 0) \wedge (0 : \mathsf{i} = 0).$

`2:` Aus `1`
folgt: $\mathsf{i} : 0 = 0 : \mathsf{i} = 0.$

$\square$

FS$\mathbb{T}$: FundamentalSatz $\mathbb{T}$.

Ersterstellung: 02/02/06 **Letzte Änderung: 17/02/12**

99-1. In diesem Essay wird Einiges über $\mathbb{S}$ und $\mathbb{T}$ ausgesagt. Dabei wird auf einige Resultate über Zahlen zurückgegriffen. Dies wird durch das nunmehrige Resultat, in dem auch die Mengen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{B}$ mitbehandelt werden, erleichtert. Dass jede *reelle* Zahl eine Zahl ist, wurde zwar bereits in **95-6** fest gestellt, doch diese Aussage wird mit ähnlichen Aussagen in den nunmehrigen Satz mitaufgenommen, damit beim Zitieren weniger Gedächtnisleistung erforderlich ist:

99-1(Satz)

a) *Aus "$p \in \mathbb{R}$" folgt "p Zahl".*

a) *Aus "$p \in \mathbb{S}$" folgt "p Zahl".*

b) *Aus "$p \in \mathbb{T}$" folgt "p Zahl".*

c) *Aus "$p \in \mathbb{C}$" folgt "p Zahl".*

d) *Aus "$p \in \mathbb{B}$" folgt "p Zahl".*

<u>Beweis **99-1**</u> `a)` `VS` gleich $p \in \mathbb{R}$.

Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{R}$”
folgt via **95-6**: p Zahl.

`b)` `VS` gleich $p \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{S}$” und
aus **95-11**“$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`“$p \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: p Zahl.

`c)` `VS` gleich $p \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{T}$” und
aus **95-12**“$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`“$p \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: p Zahl.

`d)` `VS` gleich $p \in \mathbb{C}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{C}$” und
aus **96-6**“$\mathbb{C} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`“$p \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: p Zahl.

`e)` `VS` gleich $p \in \mathbb{B}$.

`1:` Aus `VS` gleich “$p \in \mathbb{B}$” und
aus **96-6**“$\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **0-4**: $p \in \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1`“$p \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: p Zahl.

□

99-2. Im **FundamentalSatz** $\mathbb{T}$ werden Kriterien für $a \in \mathbb{T}$ formuliert. Die vielleicht wichtigste Charakterisierung lautet, dass a genau dann eine treelle Zahl ist, wenn $\mathsf{Im}a$ gleich 0 ist:

99-2(Satz) (FS$\mathbb{T}$: FundamentalSatz $\mathbb{T}$)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $a \in \mathbb{T}$.

`ii)` $\mathsf{Im}a = 0$.

`iii)` "$a = \mathsf{Re}a$" *und* "a *Zahl*".

`iv)` "$a = \mathsf{Re}a$" *und* "a *Menge*".

`v)` "$a = \mathsf{Re}a$" *und* "$a \neq \mathcal{U}$".

`REIM`-**Notation**.

Beweis **99-2**

`RECH`-**Notation**.

$\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}$ `VS` gleich $a \in \mathbb{T}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-1**: a Zahl .

`2:` Aus `1`"a Zahl"
folgt via **FSA**0: $a = a + 0$.

`3:` Aus `2`"$a = a + 0$" und
aus **98-18**"$0 = \mathsf{i} \cdot 0$"
folgt: $a = a + \mathsf{i} \cdot 0$

`4:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$0 \in \mathbb{T}$"
folgt via **AAIV**: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot 0) = 0$.

`5:` Aus `3`"$a = a + \mathsf{i} \cdot 0$" und
aus `4`"$\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot 0) = 0$"
folgt: $\mathsf{Im}a = 0$.

<u>Beweis **99-2**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Im}a = 0.$

`1:` Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}a = 0$" und
aus **0-18**"$0 \neq \mathcal{U}$"
folgt: $\mathsf{Im}a \neq \mathcal{U}.$

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Im}a \neq \mathcal{U}$"
folgt via **96-9**: $(a \text{ Zahl}) \wedge (\mathsf{Re}a \text{ Zahl}).$

`3.1:` Aus `2`"a Zahl…"
folgt via **96-24**: $a = (\mathsf{Re}a) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}a).$

`3.2:` Aus `2`"…$\mathsf{Re}a$ Zahl"
folgt via **FSA**0: $(\mathsf{Re}a) + 0 = \mathsf{Re}a.$

`4:` $a \stackrel{3.1}{=} (\mathsf{Re}a) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}a) \stackrel{\mathtt{VS}}{=} (\mathsf{Re}a) + \mathsf{i} \cdot 0 \stackrel{\mathbf{98-18}}{=} (\mathsf{Re}a) + 0 \stackrel{3.2}{=} \mathsf{Re}a.$

`5:` Aus `4`
folgt: $a = \mathsf{Re}a.$

`6:` Aus `5`"$a = \mathsf{Re}a$" und
aus `2`"a Zahl…"
folgt: $(a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \text{ Zahl}).$

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{iv)}}}$ `VS` gleich $(a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \text{ Zahl}).$

`1:` Aus `VS` gleich "…a Zahl"
folgt via **95-6**: a Menge.

`2:` Aus `VS` gleich "$a = \mathsf{Re}a$…" und
aus `1`"a Menge"
folgt: $(a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \text{ Menge}).$

$\boxed{\boxed{\texttt{iv)} \Rightarrow \texttt{v)}}}$ `VS` gleich $(a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \text{ Menge}).$

`1:` Aus `VS` gleich "…a Menge"
folgt via **0-17**: $a \neq \mathcal{U}.$

`2:` Aus `VS` gleich "$a = \mathsf{Re}a$…" und
aus `1`"$a \neq \mathcal{U}$"
folgt: $(a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \neq \mathcal{U}).$

Beweis **99-2** $\boxed{\boxed{\texttt{v)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $(a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \neq \mathcal{U})$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a = \mathsf{Re}a \ldots$" und
aus `VS` gleich "$\ldots a \neq \mathcal{U}$"
folgt: $\mathsf{Re}a \neq \mathcal{U}$.

`2:` Aus `1`"$\mathsf{Re}a \neq \mathcal{U}$"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}a \in \mathbb{T}$.

`3:` Aus `VS` gleich "$a = \mathsf{Re}a \ldots$" und
aus `2`"$\mathsf{Re}a \in \mathbb{T}$"
folgt: $a \in \mathbb{T}$.

$\square$

99-3. Via Negation folgt aus $\mathbf{FS}\mathbb{T}$ nunmehriges Kriterium:

99-3(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)`, `iv)`, `v)` *sind äquivalent:*

`i)` $a \notin \mathbb{T}$.

`ii)` $0 \neq \mathsf{Im}a$.

`iii)` "$a \neq \mathsf{Re}a$" *oder* "$a \notin \mathbb{A}$".

`iv)` "$a \neq \mathsf{Re}a$" *oder* "a *Unmenge*".

`v)` "$a \neq \mathsf{Re}a$" *oder* "$a = \mathcal{U}$".

`REIM`-**Notation**.

<u>Beweis **99-3**</u>

1: Via **FS**$\mathbb{T}$ gilt:

$$a \in \mathbb{T} \Leftrightarrow (\mathsf{Im}a = 0) \Leftrightarrow ((a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \text{ Zahl})) \Leftrightarrow ((a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \text{ Menge})) \Leftrightarrow ((a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \neq \mathcal{U})).$$

2: Aus 1 und
aus **95-4(Def)** "$(a \text{ Zahl}) \Leftrightarrow (a \in \mathbb{A})$"
folgt:

$$a \in \mathbb{T} \Leftrightarrow (\mathsf{Im}a = 0) \Leftrightarrow ((a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \in \mathbb{A})) \Leftrightarrow ((a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \text{ Menge})) \Leftrightarrow ((a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \neq \mathcal{U})).$$

3: Aus 2
folgt:

$$\neg(a \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\neg(\mathsf{Im}a = 0)) \Leftrightarrow (\neg((a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \in \mathbb{A}))) \Leftrightarrow (\neg((a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \text{ Menge}))) \Leftrightarrow (\neg((a = \mathsf{Re}a) \wedge (a \neq \mathcal{U}))).$$

4: Aus 3
folgt:

$$\neg(a \in \mathbb{T}) \Leftrightarrow (\neg(\mathsf{Im}a = 0)) \Leftrightarrow ((\neg(a = \mathsf{Re}a)) \vee (\neg(a \in \mathbb{A}))) \Leftrightarrow ((\neg(a = \mathsf{Re}a) \vee (\neg(a \text{ Menge}))) \Leftrightarrow ((\neg(a = \mathsf{Re}a)) \vee (\neg(a \neq \mathcal{U}))).$$

5: Aus 4
folgt:

$$a \notin \mathbb{T} \Leftrightarrow (0 \neq \mathsf{Im}a) \Leftrightarrow ((a \neq \mathsf{Re}a) \vee (a \notin \mathbb{A})) \Leftrightarrow ((a \neq \mathsf{Re}a) \vee (a \text{ Unmenge}))) \Leftrightarrow ((a \neq \mathsf{Re}a) \vee (a = \mathcal{U})).$$

$\square$

99-4. Die nunmehrigen Aussagen ergeben sich via $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{T}$ und $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$ aus **FS**$\mathbb{T}$:

99-4(Satz)

a) *Aus* "$p \in \mathbb{R}$" *folgt* "$p = \mathsf{Re}p$" *und* "$\mathsf{Re}p \in \mathbb{R}$".

b) *Aus* "$a \in \mathbb{S}$" *folgt* "$a = \mathsf{Re}a$" *und* "$\mathsf{Re}a \in \mathbb{S}$".

c) *Aus* "$\mathsf{Re}p \notin \mathbb{R}$" *folgt* "$p \notin \mathbb{R}$".

d) *Aus* "$\mathsf{Re}a \notin \mathbb{S}$" *folgt* "$a \notin \mathbb{S}$".

REIM-**Notation**.

Beweis **99-4** a) VS gleich $p \in \mathbb{R}$.

1: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{R}$"
folgt via **95-16**: $p \in \mathbb{T}$.

2: Aus 1"$p \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $p = \mathsf{Re}p$.

3: Aus VS gleich "$p \in \mathbb{R}$" und
aus 2"$p = \mathsf{Re}p$"
folgt: $\mathsf{Re}p \in \mathbb{R}$.

4: Aus 2"$p = \mathsf{Re}p$" und
aus 3"$\mathsf{Re}p \in \mathbb{R}$"
folgt: $(p = \mathsf{Re}p) \wedge (\mathsf{Re}p \in \mathbb{R})$.

<u>Beweis **99-4**</u> `b)` `VS` gleich $a \in \mathbb{S}$.

`1:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{S}$"
folgt via **95-16**: $a \in \mathbb{T}$.

`2:` Aus `1`"$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $a = \mathsf{Re}a$.

`3:` Aus `VS` gleich "$a \in \mathbb{S}$" und
aus `2`"$a = \mathsf{Re}a$"
folgt: $\mathsf{Re}a \in \mathbb{S}$.

`4:` Aus `2`"$a = \mathsf{Re}a$" und
aus `3`"$\mathsf{Re}a \in \mathbb{S}$"
folgt: $(a = \mathsf{Re}a) \wedge (\mathsf{Re}a \in \mathbb{S})$.

`c)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `a)` gilt: $(p \in \mathbb{R}) \Rightarrow (\mathsf{Re}p \in \mathbb{R})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\mathsf{Re}p \notin \mathbb{R}) \Rightarrow (p \notin \mathbb{R})$.

`d)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `b)` gilt: $(a \in \mathbb{S}) \Rightarrow (\mathsf{Re}a \in \mathbb{S})$.

`2:` Aus `1`
folgt: $(\mathsf{Re}a \notin \mathbb{S}) \Rightarrow (a \notin \mathbb{S})$.

$\square$

99-5. Mit diesem Resultat können einige Ungleichungen bewiesen werden. Die Kette “$\mathsf{Re}x \neq a \in \mathbb{T}$” bedeutet natürlich “$(\mathsf{Re}x \neq a) \wedge (a \in \mathbb{T})$” :

99-5(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $\mathsf{Re}x \neq a \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $x \neq a$.

b) $x \neq \mathsf{Re}a$.

c) $\mathsf{Re}x \neq \mathsf{Re}a$.

`REIM`-**Notation**.

Beweis **99-5** `a)`

`1:` Es gilt: $(x = a) \vee (x \neq a)$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $x = a$.

`2:` Aus →) “$\ldots a \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $a = \mathsf{Re}a$.

`3:` Aus 2“$a = \mathsf{Re}a$” und
aus `1.1.Fall`“$x = a$”
folgt: $a = \mathsf{Re}x$.

`4:` Es gilt 3“$a = \mathsf{Re}x$”.
Es gilt →) “$\mathsf{Re}x \neq a \ldots$”.
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq a$.

`1.2.Fall` $x \neq a$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $x \neq a$.

`bc)`

`1.1:` Aus →) “$\mathsf{Re}x \neq a \in \mathbb{T}$”
folgt via des bereits bewiesenen `a)`: $x \neq a$.

`1.2:` Aus →) “$\ldots a \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $a = \mathsf{Re}a$.

`2.b):` Aus `1.1`“$x \neq a$” und
aus `1.2`“$a = \mathsf{Re}a$”
folgt: $x \neq \mathsf{Re}a$.

`2.c):` Aus →) “$\mathsf{Re}x \neq a \ldots$” und
aus `1.2`“$a = \mathsf{Re}a$”
folgt: $\mathsf{Re}x \neq \mathsf{Re}a$.

□

99-6. Aus $0, 1, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty \in \mathbb{T}$ folgen via **99-5** die nunmehrigen "Ungleichheits-Aussagen" :

99-6(Satz)

a) *Aus* "$0 \neq \mathsf{Re}x$" *folgt* "$0 \neq x$".

b) *Aus* "$\mathsf{Re}x \neq 1$" *folgt* "$x \neq 1$".

c) *Aus* "$\mathsf{Re}x \neq \mathsf{nan}$" *folgt* "$x \neq \mathsf{nan}$".

d) *Aus* "$\mathsf{Re}x \neq +\infty$" *folgt* "$x \neq +\infty$".

e) *Aus* "$\mathsf{Re}x \neq -\infty$" *folgt* "$x \neq -\infty$".

REIM-**Notation**.

Beweis **99-6** a) VS gleich $0 \neq \mathsf{Re}x$.

1: Aus VS
folgt: $\mathsf{Re}x \neq 0$.

2: Aus 1 "$\mathsf{Re}x \neq 0$" und
aus **95-12** "$0 \in \mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{Re}x \neq 0 \in \mathbb{T}$.

3: Aus 2 "$\mathsf{Re}x \neq 0 \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-5**: $x \neq 0$.

4: Aus 3
folgt: $0 \neq x$.

b) VS gleich $\mathsf{Re}x \neq 1$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{Re}x \neq 1$" und
aus **95-12** "$1 \in \mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{Re}x \neq 1 \in \mathbb{T}$.

2: Aus 1 "$\mathsf{Re}x \neq 1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-5**: $x \neq 1$.

c) VS gleich $\mathsf{Re}x \neq \mathsf{nan}$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{Re}x \neq \mathsf{nan}$" und
aus **95-12** "$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{Re}x \neq \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$.

2: Aus 1 "$\mathsf{Re}x \neq \mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-5**: $x \neq \mathsf{nan}$.

d) VS gleich $\mathsf{Re}x \neq +\infty$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{Re}x \neq +\infty$" und
aus **95-12** "$+\infty \in \mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{Re}x \neq +\infty \in \mathbb{T}$.

2: Aus 1 "$\mathsf{Re}x \neq +\infty \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-5**: $x \neq +\infty$.

e) VS gleich $\mathsf{Re}x \neq -\infty$.

1: Aus VS gleich "$\mathsf{Re}x \neq -\infty$" und
aus **95-12** "$-\infty \in \mathbb{T}$"
folgt: $\mathsf{Re}x \neq -\infty \in \mathbb{T}$.

2: Aus 1 "$\mathsf{Re}x \neq -\infty \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-5**: $x \neq -\infty$.

□

99-7. Als weitere Konsequenz von **FS**$\mathbb{T}$ wird hier festgestellt, dass keine Klasse mit ImaginärTeil$\neq 0$ gleich einer treellen Zahl sein kann:

99-7(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \neq \mathsf{Im}x$.

$\rightarrow$) $a \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $x \neq a$.

b) $x \neq \mathsf{Re}a$.

`REIM`-**Notation**.

Beweis **99-7** a)

1: Es gilt: $(x = a) \vee (x \neq a)$.

Fallunterscheidung

1.1.Fall $x = a$.

2: Aus →) "$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}a = 0$.

3: Aus 2"$\mathsf{Im}a = 0$" und
aus 1.1.Fall"$x = a$"
folgt: $\mathsf{Im}x = 0$.

4: Es gilt 3"$\mathsf{Im}x = 0$".
Es gilt →) "$0 \neq \mathsf{Im}x$".
Ex falso quodlibet folgt: $x \neq a$.

1.2.Fall $x \neq a$.

Ende Fallunterscheidung In beiden Fällen gilt: $x \neq a$.

b)

1.1: Aus →) "$0 \neq \mathsf{Im}x$" und
aus →) "$a \in \mathbb{T}$"
folgt via des bereits bewiesenen a): $x \neq a$.

1.2: Aus →) "$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $a = \mathsf{Re}a$.

2: Aus 1.1"$x \neq a$" und
aus 1.2"$a = \mathsf{Re}a$"
folgt: $x \neq \mathsf{Re}a$.

□

99-8. Aus $0, 1, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty \in \mathbb{T}$ folgt via **99-7**, dass jede Klasse mit ImaginärTeil$\neq 0$ ungleich $0, 1, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty$ sein muss:

99-8(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $0 \neq \mathsf{Im}x$.

Dann folgt:

a) $0 \neq x$.

b) $x \neq 1$.

c) $x \neq \mathsf{nan}$.

d) $x \neq +\infty$.

e) $x \neq -\infty$.

REIM-**Notation**.

Beweis **99-8** `a)`

`1:` Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{Im} x$" und
aus **95-12**"$0 \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-7**: $x \neq 0$.

`2:` Aus `1`
folgt: $0 \neq x$.

`b)`

Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{Im} x$" und
aus **95-12**"$1 \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-7**: $x \neq 1$.

`c)`

Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{Im} x$" und
aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-7**: $x \neq \mathsf{nan}$.

`d)`

Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{Im} x$" und
aus **95-12**"$+\infty \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-7**: $x \neq +\infty$.

`e)`

Aus `VS` gleich "$0 \neq \mathsf{Im} x$" und
aus **95-12**"$-\infty \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-7**: $x \neq -\infty$.

□

99-9. Wegen $0 \neq 1 = \mathsf{Imi}$ folgt aus **99-3** die - erwartete - Aussage $\mathsf{i} \notin \mathbb{T}$. Hieraus folgt Weiteres. Die Beweis-Reihenfolge ist `b) - a) - c) - d) - e) - f)`:

99-9(Satz)

a) $\mathsf{i} \notin \mathbb{S}$.

b) $\mathsf{i} \notin \mathbb{T}$.

c) $\mathbb{T} \neq \mathbb{A}$.

d) $\mathsf{i} \neq \mathsf{nan}$.

e) $\mathsf{i} \neq +\infty$.

f) $\mathsf{i} \neq -\infty$.

<u>Beweis **99-9**</u>

`1:` Aus **95-2**"$0 \neq 1$" und
aus **AAIII**"$\mathsf{Imi} = 1$"
folgt: $0 \neq \mathsf{Imi}$.

`2.b):` Aus `1`"$0 \neq \mathsf{Imi}$"
folgt via **99-3**: $\mathsf{i} \notin \mathbb{T}$.

`3.a):` Aus `2.b)`"$\mathsf{i} \notin \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$\mathbb{S} \subseteq \mathbb{T}$"
folgt via **0-4**: $\mathsf{i} \notin \mathbb{S}$.

`4.1:` Aus **AAI**"$\mathsf{i} \in \mathbb{A}$" und
aus `2.b)`"$\mathsf{i} \notin \mathbb{T}$"
folgt via **0-10**: $\mathbb{A} \neq \mathbb{T}$.

`4.2:` Aus **95-12**"$\mathsf{nan} \in \mathbb{T}$" und
aus `2.b)`"$\mathsf{i} \notin \mathbb{T}$"
folgt via **0-1**: $\mathsf{nan} \neq \mathsf{i}$

`4.3:` Aus **95-12**"$+\infty \in \mathbb{T}$" und
aus `2.b)`"$\mathsf{i} \notin \mathbb{T}$"
folgt via **0-1**: $+\infty \neq \mathsf{i}$

`4.4:` Aus **95-12**"$-\infty \in \mathbb{T}$" und
aus `2.b)`"$\mathsf{i} \notin \mathbb{T}$"
folgt via **0-1**: $-\infty \neq \mathsf{i}$

`5.c):` Aus `4.1`
folgt: $\mathbb{T} \neq \mathbb{A}$.

`5.d):` Aus `4.2`
folgt: $\mathsf{i} \neq \mathsf{nan}$.

`5.e):` Aus `4.3`
folgt: $\mathsf{i} \neq +\infty$.

`5.f):` Aus `4.4`
folgt: $\mathsf{i} \neq -\infty$.

$\square$

99-10. Es gilt stets $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x$ und $\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$. Bei $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$ und $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$ liegen via **99-11** die Dinge anders:

99-10(Satz)

a) $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x$.

b) $\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$.

`REIM`-**Notation**.

Beweis **99-10**

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **96-9**: $(\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}) \wedge (\mathsf{Im}x \in \mathbb{T})$.

`3.1:` Aus 2“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T} \ldots$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x$.

`3.2:` Aus 2“$\ldots \mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$.

`4:` Aus `3.1` und
aus `3.2`
folgt: $(\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x)$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`2.2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$”
folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$.

`3.1:` $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.1}{=} \mathsf{Re}x$.

`3.2:` $\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) \stackrel{2.2}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U} \stackrel{2.2}{=} \mathsf{Im}x$.

`4:` Aus `3.1`“$\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \ldots = \mathsf{Re}x$” und
aus `3.2`“$\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \ldots = \mathsf{Im}x$”
folgt: $(\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x)$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

`A1` | “$(\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x) \wedge (\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x)$”

`2.a):` Aus `A1`
folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x$.

`2.b):` Aus `A1`
folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$.

□

99-11. Die vertrauten Aussagen $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)=0$ und $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)=0$ sind äquivalent, gelten aber genau dann, wenn x eine Zahl ist:

99-11(Satz)

Die Aussagen `i)`, `ii)`, `iii)` *sind äquivalent:*

`i)` *x Zahl.*

`ii)` $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)=0$.

`iii)` $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)=0$.

`REIM`-**Notation**.

<u>Beweis **99-11**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ `VS` gleich x Zahl.

1: Aus `VS` gleich "x Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

2: Aus 1"$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0$.

1: Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$ Menge.

2: Aus 1"$\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$ Menge"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x$ Zahl.

3: Aus 2"$\mathsf{Re}x$ Zahl"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

4: Aus 3"$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0$.

$\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0$.

1: Aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0$" und
aus $0\mathcal{U}$**Axiom**"0 Menge"
folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$ Menge.

2: Aus 1"$\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$ Menge"
folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x$ Zahl.

3: Aus 2"$\mathsf{Im}x$ Zahl"
folgt via **96-9**: x Zahl.

$\square$

99-12. Mit Hilfe von **99-10** ergibt sich ein Kriterium für $x \notin \mathbb{A}$:

99-12(Satz)

Die Aussagen i), ii), iii) *sind äquivalent:*

i) $x \notin \mathbb{A}$.

ii) $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U}$.

iii) $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}$.

REIM-**Notation**.

Beweis **99-12** $\boxed{\boxed{\texttt{i)} \Rightarrow \texttt{ii)}}}$ VS gleich $x \notin \mathbb{A}$.

1: Aus VS gleich "$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

2: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) \stackrel{1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

3: Aus 2
folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U}$.

<u>Beweis **99-12**</u> $\boxed{\boxed{\texttt{ii)} \Rightarrow \texttt{iii)}}}$ `VS` gleich $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U}$.

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall` "x Zahl" folgt via **99-11**: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0$.

`3:` Aus `2` "$\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0$" und aus `VS` gleich "$\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U}$" folgt: $0 = \mathcal{U}$.

`4:` Es gilt `3` "$0 = \mathcal{U}$". Es gilt **0-18** "$0 \neq \mathcal{U}$". Ex falso quodlibet folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall` "$x \notin \mathbb{A}$" folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$.

`3:` $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) \stackrel{1}{=} \mathsf{Im}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{98-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3` folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}$.

<u>Beweis</u> **99-12** $\boxed{\boxed{\texttt{iii)} \Rightarrow \texttt{i)}}}$ `VS` gleich $\qquad \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}$.

`1:` Via **95-6** gilt: $\qquad (x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\qquad x$ Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl”
folgt via **99-11**: $\qquad \mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0$” und
aus `VS` gleich “$\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}$”
folgt: $\qquad 0 = \mathcal{U}$.

`4:` Es gilt `3`“$0 = \mathcal{U}$”.
Es gilt **0-18**“$0 \neq \mathcal{U}$”.
Ex falso quodlibet folgt: $\qquad x \notin \mathbb{A}$.

`1.2.Fall` $\qquad x \notin \mathbb{A}$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt: $\qquad x \notin \mathbb{A}$.

□

99-13. Aus **99-10**, **99-11**, **99-12** werden die nunmehrigen Konsequenzen gezogen:

99-13(Satz)

a) "$\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) \in \mathbb{T}$" *oder* "$\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U}$".

b) "$\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) \in \mathbb{T}$" *oder* "$\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}$".

c) "$\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0$" *oder* "$\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U}$".

d) "$\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0$" *oder* "$\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}$".

e) $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = -\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$.

f) $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = -\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$.

g) $\mathsf{Re} \circ \mathsf{Re} = \mathsf{Re}$.

h) $\mathsf{Re} \circ \mathsf{Im} = \mathsf{Im}$.

i) $\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re} = \mathsf{zo}_{\mathbb{A}}$.

j) $\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im} = \mathsf{zo}_{\mathbb{A}}$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **99-13** `a)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl” folgt via **96-9**: $\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$.

`3:` Via **99-10** gilt: $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x$.

`4:` Aus `3`“$\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathsf{Re}x$” und aus `2`“$\mathsf{Re}x \in \mathbb{T}$” folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4` folgt: $(\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Re}x = \mathcal{U}$.

`3:` $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) \stackrel{2}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`“$\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \ldots = \mathcal{U}$” folgt: $(\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U}).$$

Beweis **99-13** `b)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“x Zahl” folgt via **96-9**: $\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$.

`3:` Via **99-10** gilt: $\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$.

`4:` Aus `3`“$\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathsf{Im}x$” und aus `2`“$\mathsf{Im}x \in \mathbb{T}$” folgt: $\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) \in \mathbb{T}$.

`5:` Aus `4` folgt: $(\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) \in \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **96-10**: $\mathsf{Im}x = \mathcal{U}$.

`3:` $\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) \stackrel{2}{=} \mathsf{Re}\mathcal{U} \stackrel{\mathbf{96-19}}{=} \mathcal{U}$.

`4:` Aus `3`“$\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \ldots = \mathcal{U}$” folgt: $(\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathbb{T}) \vee (\mathsf{Re}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}).$$

Beweis **99-13** `c)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`"x Zahl"
folgt via **99-11**: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0$.

`3:` Aus 2
folgt: $(\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`"$x \notin \mathbb{A}$"
folgt via **99-12**: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus 2
folgt: $(\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U}).$$

Beweis **99-13** `d)`

`1:` Via **95-6** gilt: $(x \text{ Zahl}) \vee (x \notin \mathbb{A})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` x Zahl.

`2:` Aus `1.1.Fall`“$x \in \mathbb{A}$” folgt via **99-11**: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0$.

`3:` Aus `2` folgt: $(\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U})$.

`1.2.Fall` $x \notin \mathbb{A}$.

`2:` Aus `1.2.Fall`“$x \notin \mathbb{A}$” folgt via **99-12**: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}$.

`3:` Aus `2` folgt: $(\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U})$.

`Ende Fallunterscheidung` In beiden Fällen gilt:

$$(\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}).$$

`e)`

`1:` Via des bereits bewiesenen `c)` gilt: $(\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = 0$.

`2:` $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) \overset{\texttt{1.1.Fall}}{=} 0 \overset{\mathbf{98-15}}{=} -0 \overset{\texttt{1.1.Fall}}{=} -\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$.

`3:` Aus `2` folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = -\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = \mathcal{U}$.

`2:` $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) \overset{\texttt{1.1.Fall}}{=} \mathcal{U} \overset{\mathbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \overset{\texttt{1.1.Fall}}{=} -\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$.

`3:` Aus `2` folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = -\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$.

In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x) = -\mathsf{Im}(\mathsf{Re}x)$.

<u>Beweis **99-13** `f)`</u>

`1:` Via des bereits bewiesenen `d)` gilt: $(\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0) \vee (\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U})$.

`Fallunterscheidung`

`1.1.Fall` $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = 0$.

`2:` $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} 0 \stackrel{\textbf{98-15}}{=} -0 \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} -\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$.

`3:` Aus `2` folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = -\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$.

`1.2.Fall` $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = \mathcal{U}$.

`2:` $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} \mathcal{U} \stackrel{\textbf{96-19}}{=} -\mathcal{U} \stackrel{\text{1.1.Fall}}{=} -\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$.

`3:` Aus `2` folgt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = -\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$.

In beiden Fällen gilt: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x) = -\mathsf{Im}(\mathsf{Im}x)$.

Beweis **99-13** g)

1.1: Aus **AAII**"$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$",
aus **AAII**"$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$" und
aus **95-12**"$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$"
folgt via **21-10**: | A1 | "$\mathsf{Re} \circ \mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$"

> **Thema1.2** $\alpha \in \mathbb{A}$.
>
> 2.1: Aus **96-1**"Re Funktion" und
> aus **96-1**"Re Funktion"
> folgt via **18-46**: $(\mathsf{Re} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = \mathsf{Re}(\mathsf{Re}(\alpha))$.
>
> 2.2: Via **99-10** gilt: $\mathsf{Re}(\mathsf{Re}(\alpha)) = \mathsf{Re}\alpha$.
>
> 3: Aus 2.1"$(\mathsf{Re} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = \mathsf{Re}(\mathsf{Re}(\alpha))$" und
> aus 2.2"$\mathsf{Re}(\mathsf{Re}(\alpha)) = \mathsf{Re}\alpha$"
> folgt: $(\mathsf{Re} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = \mathsf{Re}(\alpha)$.

Ergo Thema1.2: | A2 | "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow ((\mathsf{Re} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = \mathsf{Re}(\alpha))$"

2: Aus A1 gleich "$\mathsf{Re} \circ \mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$",
aus **AAII**"$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$" und
aus A2 gleich "$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow ((\mathsf{Re} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = \mathsf{Re}(\alpha))$"
folgt via **21-12**: $\mathsf{Re} \circ \mathsf{Re} = \mathsf{Re}$.

<u>Beweis</u> **99-13** `h)`

`1.1:` Aus **AAII**“$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”,
aus **AAII**“$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$” und
aus **95-12**“$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **21-10**: `A1` | “$\mathsf{Re} \circ \mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”

`Thema1.2` $\alpha \in \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus **96-1**“Re Funktion” und
aus **96-1**“Im Funktion”
folgt via **18-46**: $(\mathsf{Re} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = \mathsf{Re}(\mathsf{Im}(\alpha))$.

`2.2:` Via **99-10** gilt: $\mathsf{Re}(\mathsf{Im}(\alpha)) = \mathsf{Im}\alpha$.

`3:` Aus `2.1`“$(\mathsf{Re} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = \mathsf{Re}(\mathsf{Im}(\alpha))$” und
aus `2.2`“$\mathsf{Re}(\mathsf{Im}(\alpha)) = \mathsf{Im}\alpha$”
folgt: $(\mathsf{Re} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = \mathsf{Im}(\alpha)$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow ((\mathsf{Re} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = \mathsf{Im}(\alpha))$”

`2:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{Re} \circ \mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”,
aus **AAII**“$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow ((\mathsf{Re} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = \mathsf{Im}(\alpha))$”
folgt via **21-12**: $\mathsf{Re} \circ \mathsf{Im} = \mathsf{Im}$.

Beweis **99-13** `i)`

`1.1:` Aus **AAII**“$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”,
aus **AAII**“$\mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$” und
aus **95-12**“$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **21-10**: `A1` | “$\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”

`Thema1.2` $\alpha \in \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus **96-1**“Im Funktion” und
aus **96-1**“Re Funktion”
folgt via **18-46**: $(\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = \mathsf{Im}(\mathsf{Re}(\alpha))$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: α Zahl.

`2.3:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathbb{A}$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\mathbb{A}}(\alpha) = 0$.

`3:` Aus `2.2`“α Zahl”
folgt via **99-11**: $\mathsf{Im}(\mathsf{Re}(\alpha)) = 0$.

`4:` Aus `2.1`“$(\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = \mathsf{Im}(\mathsf{Re}(\alpha))$” und
aus `3`“$\mathsf{Im}(\mathsf{Re}(\alpha)) = 0$”
folgt: $(\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = 0$.

`5:` Aus `4`“$(\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = 0$” und
aus `2.3`“$\mathsf{zo}_{\mathbb{A}}(\alpha) = 0$”
folgt: $(\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = \mathsf{zo}_{\mathbb{A}}(\alpha)$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` | “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow ((\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = \mathsf{zo}_{\mathbb{A}}(\alpha))$”

`2:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”,
aus **21-13**“$\mathsf{zo}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \{0\}$” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow ((\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re})(\alpha) = \mathsf{zo}_{\mathbb{A}}(\alpha))$”
folgt via **21-12**: $\mathsf{Im} \circ \mathsf{Re} = \mathsf{zo}_{\mathbb{A}}$.

<u>Beweis</u> **99-13** `j)`

`1.1:` Aus **AAII**“$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”,
aus **AAII**“$\mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$” und
aus **95-12**“$\mathbb{T} \subseteq \mathbb{A}$”
folgt via **21-10**: `A1` “$\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”

`Thema1.2` $\alpha \in \mathbb{A}$.

`2.1:` Aus **96-1**“Im Funktion” und
aus **96-1**“Im Funktion”
folgt via **18-46**: $(\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = \mathsf{Im}(\mathsf{Im}(\alpha))$.

`2.2:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathbb{A}$”
folgt via **95-4(Def)**: α Zahl.

`2.3:` Aus `Thema1.2`“$\alpha \in \mathbb{A}$”
folgt via **20-5**: $\mathsf{zo}_{\mathbb{A}}(\alpha) = 0$.

`3:` Aus `2.2`“α Zahl”
folgt via **99-11**: $\mathsf{Im}(\mathsf{Im}(\alpha)) = 0$.

`4:` Aus `2.1`“$(\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = \mathsf{Im}(\mathsf{Im}(\alpha))$” und
aus `3`“$\mathsf{Im}(\mathsf{Im}(\alpha)) = 0$”
folgt: $(\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = 0$.

`5:` Aus `4`“$(\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = 0$” und
aus `2.3`“$\mathsf{zo}_{\mathbb{A}}(\alpha) = 0$”
folgt: $(\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = \mathsf{zo}_{\mathbb{A}}(\alpha)$.

Ergo `Thema1.2`: `A2` “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow ((\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = \mathsf{zo}_{\mathbb{A}}(\alpha))$”

`2:` Aus `A1` gleich “$\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im} : \mathbb{A} \to \mathbb{T}$”,
aus **21-13**“$\mathsf{zo}_{\mathbb{A}} : \mathbb{A} \to \{0\}$” und
aus `A2` gleich “$\forall \alpha : (\alpha \in \mathbb{A}) \Rightarrow ((\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im})(\alpha) = \mathsf{zo}_{\mathbb{A}}(\alpha))$”
folgt via **21-12**: $\mathsf{Im} \circ \mathsf{Im} = \mathsf{zo}_{\mathbb{A}}$.

□

99-14. Mit Hilfe von **FS**$\mathbb{T}$ lassen sich aus $a \in \mathbb{T}$ einige weitere Aussagen über a herleiten:

99-14(Satz)

Es gelte:

$\rightarrow$) $a \in \mathbb{T}$.

Dann folgt:

a) $a = a + \mathsf{i} \cdot 0$.

b) $a = \mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot 0)$.

c) $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot 0) = 0$.

`REIM.RECH`-**Notation**.

<u>Beweis **99-14**</u>

`1.1:` Aus →) "$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **99-1**: a Zahl.

`1.2:` Aus →) "$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $a = \mathsf{Re}a$.

`1.3:` Aus →) "$a \in \mathbb{T}$"
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $\mathsf{Im}a = 0$.

`2:` Aus `1.1` "a Zahl"
folgt via **96-24**: $a = (\mathsf{Re}a) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}a)$.

`3:` $a \stackrel{2}{=} (\mathsf{Re}a) + \mathsf{i} \cdot (\mathsf{Im}a) \stackrel{1.3}{=} (\mathsf{Re}a) + \mathsf{i} \cdot 0 \stackrel{1.2}{=} a + \mathsf{i} \cdot 0$.

`4.a):` Aus `3`
folgt: $a = a + \mathsf{i} \cdot 0$.

`5.b):` Aus `1.2` "$a = \mathsf{Re}a$" und
aus `4.a)` "$a = a + \mathsf{i} \cdot 0$"
folgt: $a = \mathsf{Re}(a + \mathsf{i} \cdot 0)$.

`5.c):` Aus `1.3` "$\mathsf{Im}a = 0$" und
aus `4.a)` "$a = a + \mathsf{i} \cdot 0$"
folgt: $\mathsf{Im}(a + \mathsf{i} \cdot 0) = 0$.

$\square$

99-15. Mit Hilfe von **99-14** folgen einige Aussagen über die treellen Parameter $1, \mathsf{nan}, +\infty, -\infty$:

99-15(Satz)

a) "$\mathsf{Re}1 = 1$" *und* "$\mathsf{Im}1 = 0$" *und* "$1 = 1 + \mathsf{i} \cdot 0$".

b) "$\mathsf{Renan} = \mathsf{nan}$" *und* "$\mathsf{Imnan} = 0$" *und* "$\mathsf{nan} = \mathsf{nan} + \mathsf{i} \cdot 0$".

c) "$\mathsf{Re}(+\infty) = +\infty$" *und* "$\mathsf{Im}(+\infty) = 0$" *und* "$+\infty = (+\infty) + \mathsf{i} \cdot 0$".

d) "$\mathsf{Re}(-\infty) = -\infty$" *und* "$\mathsf{Im}(-\infty) = 0$" *und* "$-\infty = (-\infty) + \mathsf{i} \cdot 0$".

`REIM.RECH`-**Notation**.

Beweis **99-15** a)

1.1: Aus **95-12** "$1 \in \mathbb{T}$" folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(1 = \mathsf{Re}1) \wedge (\mathsf{Im}1 = 0)$.

1.2: Aus **95-12** "$1 \in \mathbb{T}$" folgt via **99-14**: $1 = 1 + \mathsf{i} \cdot 0$.

2: Aus 1.1 "$1 = \mathsf{Re}1 \ldots$" folgt: $\mathsf{Re}1 = 1$.

3: Aus 2 "$\mathsf{Re}1 = 1$", aus 1.1 "$\ldots \mathsf{Im}1 = 0$" und aus 1.2 "$1 = 1 + \mathsf{i} \cdot 0$" folgt: $(\mathsf{Re}1 = 1) \wedge (\mathsf{Im}1 = 0) \wedge (1 = 1 + \mathsf{i} \cdot 0)$.

<u>Beweis</u> **99-15** `b)`

`1.1:` Aus **95-12**“$\mathsf{nan}\in\mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(\mathsf{nan}=\mathsf{Re}\,\mathsf{nan})\wedge(\mathsf{Im}\,\mathsf{nan}=0)$.

`1.2:` Aus **95-12**“$\mathsf{nan}\in\mathbb{T}$”
folgt via **99-14**: $\mathsf{nan}=\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot 0$.

`2:` Aus `1.1`“$\mathsf{nan}=\mathsf{Re}\,\mathsf{nan}\ldots$”
folgt: $\mathsf{Re}\,\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{Re}\,\mathsf{nan}=\mathsf{nan}$”,
aus `1.1`“$\ldots\mathsf{Im}\,\mathsf{nan}=0$” und
aus `1.2`“$\mathsf{nan}=\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot 0$”
folgt: $(\mathsf{Re}\,\mathsf{nan}=\mathsf{nan})\wedge(\mathsf{Im}\,\mathsf{nan}=0)\wedge(\mathsf{nan}=\mathsf{nan}+\mathsf{i}\cdot 0)$.

`c)`

`1.1:` Aus **95-12**“$+\infty\in\mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(+\infty=\mathsf{Re}(+\infty))\wedge(\mathsf{Im}(+\infty)=0)$.

`1.2:` Aus **95-12**“$+\infty\in\mathbb{T}$”
folgt via **99-14**: $+\infty=(+\infty)+\mathsf{i}\cdot 0$.

`2:` Aus `1.1`“$+\infty=\mathsf{Re}(+\infty)\ldots$”
folgt: $\mathsf{Re}(+\infty)=+\infty$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{Re}(+\infty)=+\infty$”,
aus `1.1`“$\ldots\mathsf{Im}(+\infty)=0$” und
aus `1.2`“$+\infty=(+\infty)+\mathsf{i}\cdot 0$”
folgt: $(\mathsf{Re}(+\infty)=+\infty)\wedge(\mathsf{Im}(+\infty)=0)\wedge(+\infty=(+\infty)+\mathsf{i}\cdot 0)$.

`d)`

`1.1:` Aus **95-12**“$-\infty\in\mathbb{T}$”
folgt via **FS**$\mathbb{T}$: $(-\infty=\mathsf{Re}(-\infty))\wedge(\mathsf{Im}(-\infty)=0)$.

`1.2:` Aus **95-12**“$-\infty\in\mathbb{T}$”
folgt via **99-14**: $-\infty=(-\infty)+\mathsf{i}\cdot 0$.

`2:` Aus `1.1`“$-\infty=\mathsf{Re}(-\infty)\ldots$”
folgt: $\mathsf{Re}(-\infty)=-\infty$.

`3:` Aus `2`“$\mathsf{Re}(-\infty)=-\infty$”,
aus `1.1`“$\ldots\mathsf{Im}(-\infty)=0$” und
aus `1.2`“$-\infty=(-\infty)+\mathsf{i}\cdot 0$”
folgt: $(\mathsf{Re}(-\infty)=-\infty)\wedge(\mathsf{Im}(-\infty)=0)\wedge(-\infty=(-\infty)+\mathsf{i}\cdot 0)$.

$\square$

99-16. Nun wird $\mathsf{ab2}(x)$ für einige Parameter x berechnet:

99-16(Satz)

a) $\mathsf{ab2}(0) = 0$.

b) $\mathsf{ab2}(1) = 1$.

c) $\mathsf{ab2}(\mathsf{nan}) = \mathsf{nan}$.

d) $\mathsf{ab2}(+\infty) = +\infty$.

e) $\mathsf{ab2}(-\infty) = -\infty$.

f) $\mathsf{ab2}(\mathsf{i}) = 1$.

Beweis **99-16**

`REIM.RECH`-**Notation**.

---

a)

1:

$$\mathsf{ab2}(0)$$
$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}0) \cdot (\mathsf{Re}0) + (\mathsf{Im}0) \cdot (\mathsf{Im}0)$$
$$\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0 \cdot 0 + (\mathsf{Im}0) \cdot (\mathsf{Im}0)$$
$$\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0$$
$$\stackrel{\mathbf{98-16}}{=} 0 + 0$$
$$\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 0.$$

2: Aus 1 folgt: $\mathsf{ab2}(0) = 0$.

<u>Beweis **99-16**</u> `b)`

`1:` $$\mathsf{ab2}(1)$$
$$\overset{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}1)\cdot(\mathsf{Re}1)+(\mathsf{Im}1)\cdot(\mathsf{Im}1)$$
$$\overset{\mathbf{99-15}}{=} 1\cdot 1+(\mathsf{Im}1)\cdot(\mathsf{Im}1)$$
$$\overset{\mathbf{99-15}}{=} 1\cdot 1+0\cdot 0$$
$$\overset{\mathbf{98-19}}{=} 1+0\cdot 0$$
$$\overset{\mathbf{98-16}}{=} 1+0$$
$$\overset{\mathbf{98-10}}{=} 1.$$

`2:` Aus `1` folgt: $$\mathsf{ab2}(1)=1.$$

`c)`

`1:` $$\mathsf{ab2}(\mathsf{nan})$$
$$\overset{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Renan})\cdot(\mathsf{Renan})+(\mathsf{Imnan})\cdot(\mathsf{Imnan})$$
$$\overset{\mathbf{99-15}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}+(\mathsf{Imnan})\cdot(\mathsf{Imnan})$$
$$\overset{\mathbf{99-15}}{=} \mathsf{nan}\cdot\mathsf{nan}+0\cdot 0$$
$$\overset{\mathbf{97-5}}{=} \mathsf{nan}+0\cdot 0$$
$$\overset{\mathbf{98-16}}{=} \mathsf{nan}+0$$
$$\overset{\mathbf{98-10}}{=} \mathsf{nan}.$$

`2:` Aus `1` folgt: $$\mathsf{ab2}(\mathsf{nan})=\mathsf{nan}.$$

Beweis **99-16** d)

1:
$$\mathsf{ab2}(+\infty)$$
$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}(+\infty)) \cdot (\mathsf{Re}(+\infty)) + (\mathsf{Im}(+\infty)) \cdot (\mathsf{Im}(+\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{99-15}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) + (\mathsf{Im}(+\infty)) \cdot (\mathsf{Im}(+\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{99-15}}{=} (+\infty) \cdot (+\infty) + 0 \cdot 0$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + 0 \cdot 0$$
$$\stackrel{\mathbf{98-16}}{=} (+\infty) + 0$$
$$\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} +\infty.$$

2: Aus 1 folgt:
$$\mathsf{ab2}(+\infty) = +\infty.$$

e)

1:
$$\mathsf{ab2}(-\infty)$$
$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}(-\infty)) \cdot (\mathsf{Re}(-\infty)) + (\mathsf{Im}(-\infty)) \cdot (\mathsf{Im}(-\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{99-15}}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) + (\mathsf{Im}(-\infty)) \cdot (\mathsf{Im}(-\infty))$$
$$\stackrel{\mathbf{99-15}}{=} (-\infty) \cdot (-\infty) + 0 \cdot 0$$
$$\stackrel{\mathbf{AAVI}}{=} (+\infty) + 0 \cdot 0$$
$$\stackrel{\mathbf{98-16}}{=} (+\infty) + 0$$
$$\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} +\infty.$$

2: Aus 1 folgt:
$$\mathsf{ab2}(-\infty) = +\infty.$$

Beweis **99-16** `f)`

`1:` $\mathsf{ab2}(\mathsf{i})$

$$\stackrel{\mathbf{96-22}}{=} (\mathsf{Re}\,\mathsf{i}) \cdot (\mathsf{Re}\,\mathsf{i}) + (\mathsf{Im}\,\mathsf{i}) \cdot (\mathsf{Im}\,\mathsf{i})$$

$$\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0 \cdot 0 + (\mathsf{Im}\,\mathsf{i}) \cdot (\mathsf{Im}\,\mathsf{i})$$

$$\stackrel{\mathbf{AAIII}}{=} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1$$

$$\stackrel{\mathbf{98-16}}{=} 0 + 1 \cdot 1$$

$$\stackrel{\mathbf{98-19}}{=} 0 + 1$$

$$\stackrel{\mathbf{98-10}}{=} 1.$$

`2:` Aus `1` folgt: $\mathsf{ab2}(\mathsf{i}) = 1.$

□

- **J. Kelley**, *General Topology*, Springer, 1961.
- **E. Landau**, *Grundlagen der Analysis*, Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt, 1970.
- **A. Levy**, *Basic Set Theory*, Springer, 1979.
- **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, 1987(3).
- **J. Schmidt**, *Mengenlehre. Band 1: Grundbegriffe*, B.I. Mannheim/Wien/Zürich, 1974(2).